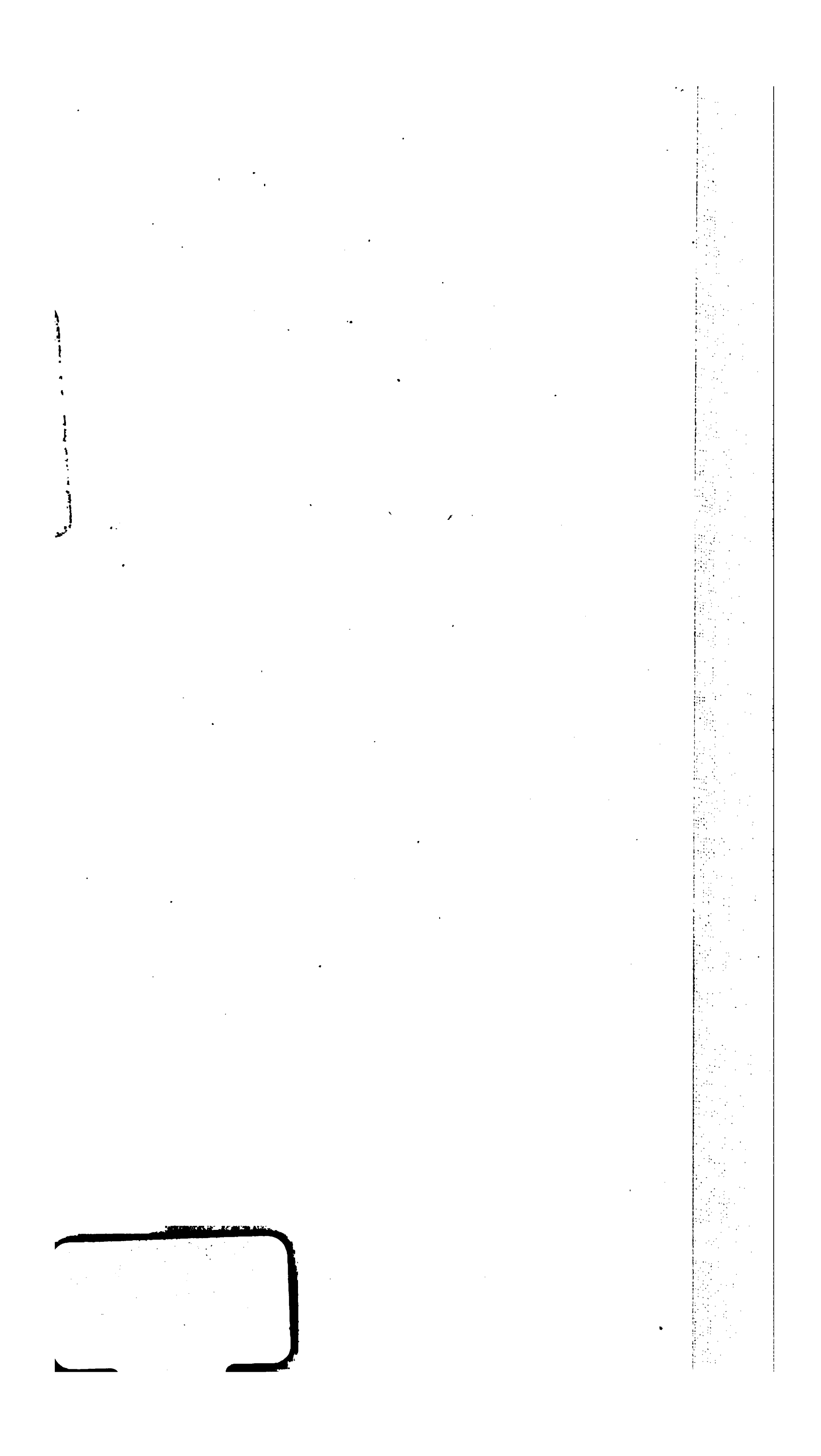
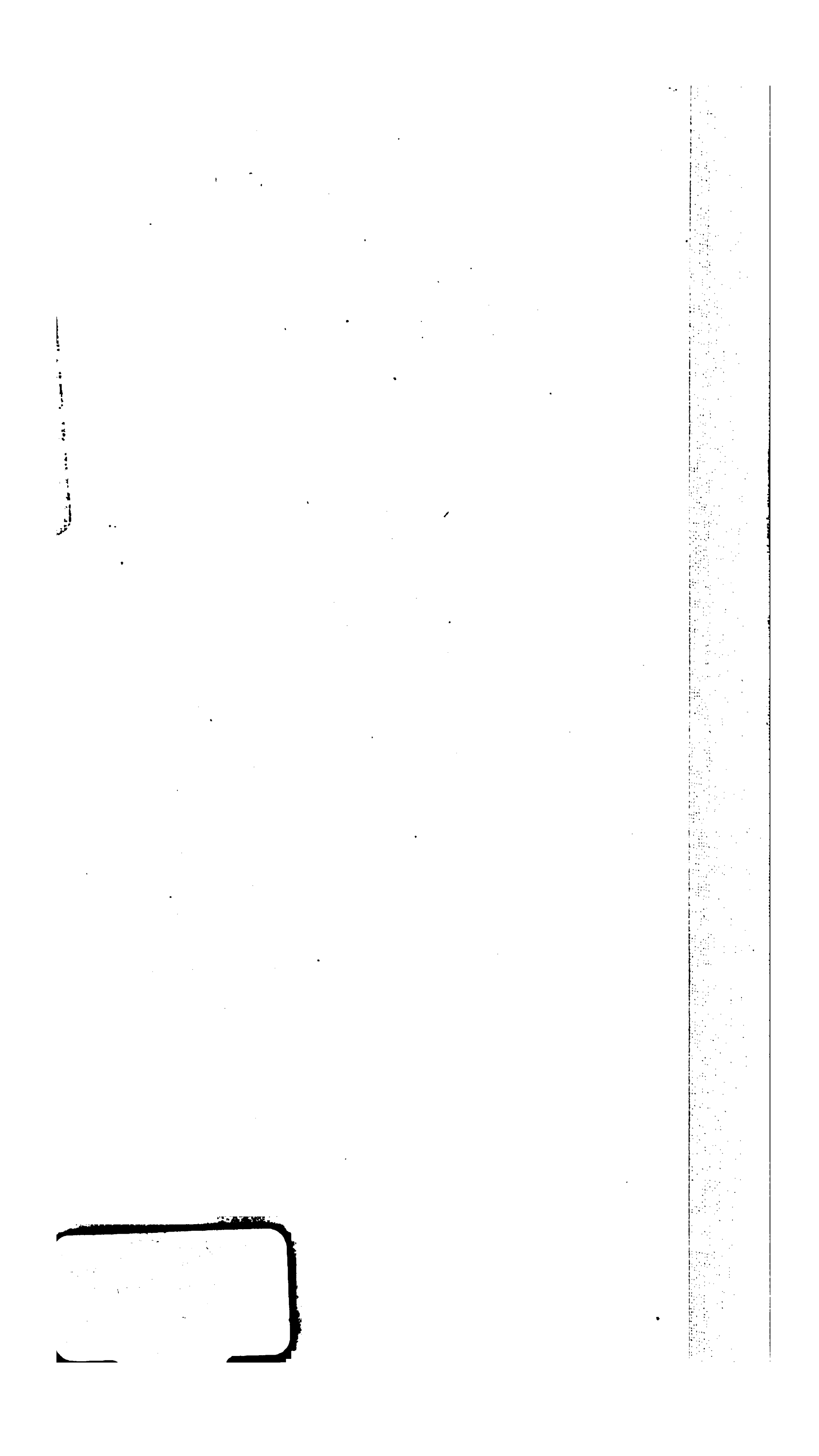
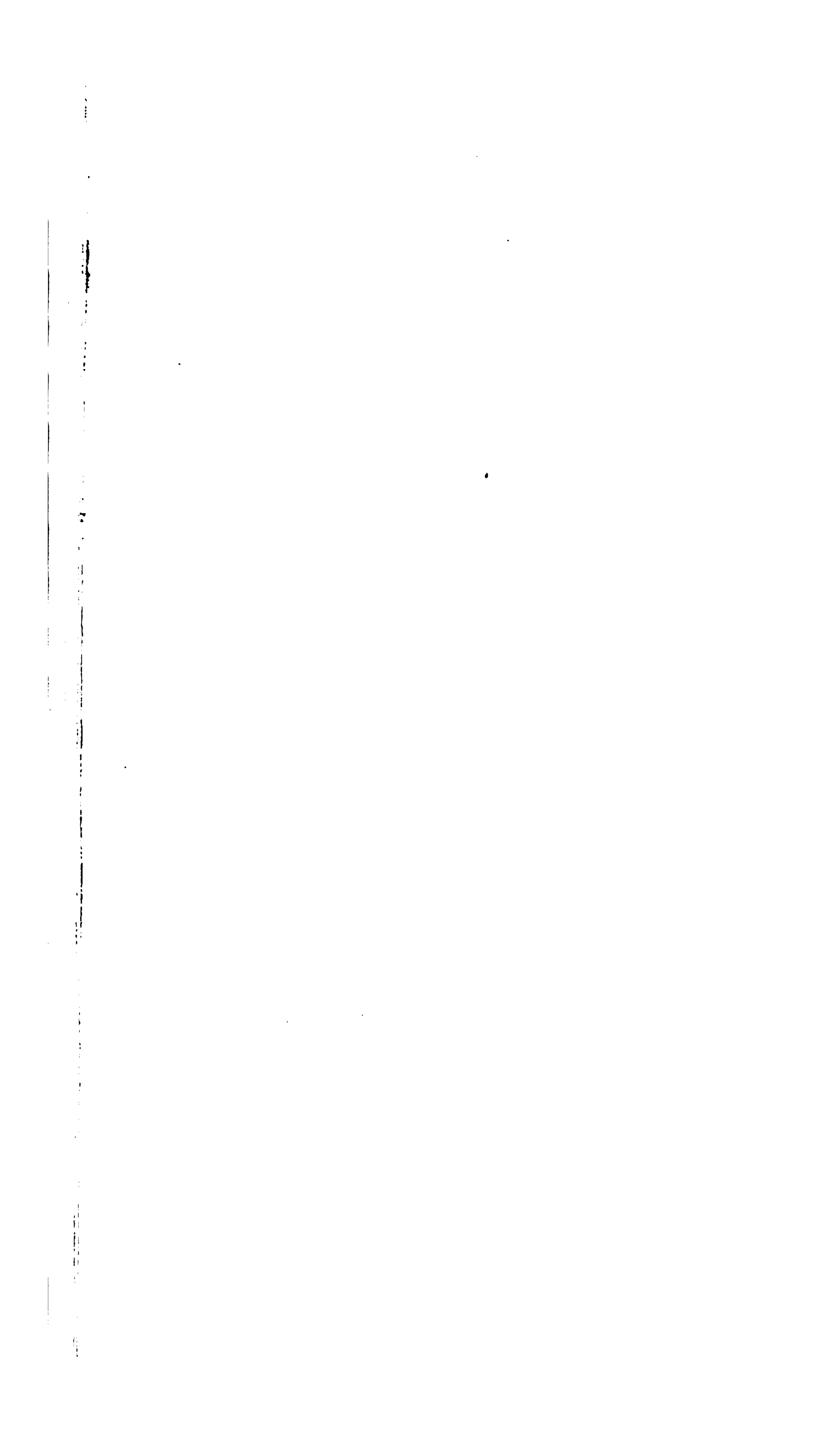









OKG
Diesterweg



Beiträge zu der Lehre von den POSITIVEN UND NEGATIVEN GRÖSSEN

von

Dr. W. A. Diesterweg,

ordentlichem Professor der Mathematik an der königl. rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität.

Bonn 1831.

Verlag von T. Habicht.



B e i t r ä g e

zu der

Lehre von den positiven und negativen Grössen.

Aufgabe I. (Fig. 1.)

Durch einen auf der Verlängerung der Grundlinie DC eines gegebenen Rectangels ABCD gegebenen Punkt E eine gerade Linie EF zu ziehen, welche die der Grundlinie gegenüber liegende Seite in ihrer Verlängerung so schneide, dass das Viereck DCGH zu dem Dreieck BGF in dem Verhältnisse der gegebenen geraden Linien p, q stehe.

1. Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey EF die gesuchte Linie,

so ist $\triangle ECG : \triangle EDH = CE^2 : ED^2$ (El. VI. 19.)

also $\triangle ECG : DCGH = CE^2 : \left\{ \begin{matrix} CE^2 - ED^2 \\ KC.CD, \end{matrix} \right.$ (El. II. 6.)

wenn $KE = ED$.

Da $DCGH : \triangle BGF = p:q$ (p. hyp.)

$= CD:r$, wenn $CD:r = p:q$;

$= KC.CD : KC.r$

so ist $\left. \begin{matrix} \triangle ECG : \triangle BGF \\ \text{(El. VI. 19.)}\ EC^2 : BF^2 \end{matrix} \right\} = CE^2 : KC.r$,

folglich ist $BF^2 = KC.r$,

somit $KC : BF = FB : r$;

mithin ist BF der Grösse nach, somit der Punkt F und die Lage der geraden Linie BF gegeben.

Construction.

Man mache $BP=p$, $BQ=q$, $AR \# PQ$, $KE=ED$, $KL \# DA$, $MB=BL$, beschreibe über MR als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte AB in F schneide, und ziehe die gerade Linie EF, so ist dieselbe die gesuchte Linie.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left.\begin{matrix} MB \\ BL \end{matrix}\right\} : BF = FB : BR$$

$$\text{also } BF^2 = CK.BR$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} EC^2 : BF^2 \\ \triangle ECG : \triangle BGF \end{matrix}\right\} = EC^2 : CK.BR$$

$$\text{Nun ist } \triangle ECG : \triangle EDH = CE^2 : ED^2$$

$$\text{mithin } DCGH : \triangle ECG = \left\{\begin{matrix} CE^2 - ED^2 \\ KC.CD \end{matrix}\right\} : CE^2$$

$$\text{somit } DCGH : \triangle BGF = KC.CD : CK.BR$$

$$= \left\{\begin{matrix} CD \\ AB \end{matrix}\right\} : BR$$

$$= PB : BQ$$

$$= p : q.$$

Zusatz.

Verbindet man auch den zweiten Durchschnitt F′ des Kreises und der Linie AB, oder ihrer Verlängerung, mit E durch die gerade Linie EF′, welche der verlängerten CB in G′ begegne, so ist

$$BF'^2 = CK.BR$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} EC^2 : BF'^2 \\ \triangle ECG' : \triangle BG'F' \end{matrix}\right\} = EC^2 : CK.BR$$

Nun ist $\triangle ECG':\triangle EDH'=EC^2:ND^2$

$$\text{folglich } DCG'H':\triangle ECG'=\left\{\begin{matrix}CE^2-ED^2\\ KC.CD\end{matrix}\right\}:EC^2$$

$$\text{mithin } DCG'H':\triangle BG'F'=KC.CD:CK.BR$$
$$=\left\{\begin{matrix}CD\\ AB\end{matrix}\right\}:BR$$
$$=\quad p:q.$$

Demnach ist die Linie EF' eine zweite Linie mit der gegebenen Eigenschaft.

2. Algebraische Behandlung.

Bezeichnet man den Werth von CD mit a, von ED mit b, von BF mit x,

$$\text{so ist } \triangle ECG:\triangle EDH=(a+b)^2:b^2$$

$$\text{also } \triangle ECG:DCGH=(a+b)^2:\left\{\begin{matrix}a^2+2ab\\ a(a+2b)\end{matrix}\right.$$

$$\text{Da } DCGH:\triangle BGF=p:q$$

$$\text{so ist } \left.\begin{matrix}\triangle ECG:\triangle BGF\\ EC^2\,\Big\}\cdot x^2\\ (a+b)^2\end{matrix}\right\} \begin{matrix}=\frac{p}{q}(a+b)^2:a(a+2b)\\ =\frac{a}{r}(a+b)^2:a(a+2b),\ \text{wenn}\\ p:q=a:r;\\ =(a+b)^2:r(a+2b)\end{matrix}$$

$$\text{folglich } x^2=r(a+2b)$$
$$\text{mithin } x=\pm\sqrt{r(a+2b)}$$

Zusatz.

Da die Algebra zwey, einander absolut gleiche, mit den Zeichen $\pm$ versehene Zahlwerthe für die gesuchte Linie BF angiebt, die Geometrie aber zwey der Lage nach entgegengesetzte Linien BF, BF' construirt, welche der Aufgabe Genüge leisten, so drückt, wenn BF als der positive Werth von x angesehen wird, BF'

den negativen aus. Was also geometrisch betrachtet sich als den Gegensatz der von dem Punkte B aus in entgegengesetzten Richtungen gezogenen geraden Linien darstellt, deutet die Algebra durch den Gegensatz der Zeichen $\pm$ an.

Aufgabe II. (Fig. 2.)

Eine gegebene gerade Linie AB in zwey Segmente AC, CB zu theilen, dass die Summe der Quadrate derselben dem Quadrate einer gegebenen geraden Linie p gleich sey.

1. Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey C der gesuchte Punkt, so ist, wenn ACD=R, DC=CA genommen, die gerade Linie AD gezogen, und bis zu dem in B auf AB aufgerichteten Perpendikel BE verlängert wird, $AC:CD = AB:BE$,

$$\text{also } EB = BA,$$

mithin ist der Punkt E und die Linie AE der Länge nach gegeben.

$$\text{Auch ist } DC^2 = CA^2$$

$$\text{somit } \left.\begin{array}{c} DC^2 + CB^2 \\ BD^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = AC^2 + CB^2 \\ = p^2 \end{array}$$

$$\text{folglich } BD = p.$$

Demnach liegt D auf dem Umfange eines aus B als Mittelpunkt mit einem Radius = p beschriebenen Kreises. Da er auch auf der geraden Linie AE liegt, so ist D somit C gegeben.

Construction.

Man errichte in B auf der Linie AB ein Perpendikel EB=BA, ziehe die gerade Linie AE, beschreibe

aus B als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Halbmesser $= p$, welche die Linie AE in D erreiche, und fälle von D auf AB das Perpendikel DC, so ist C der gesuchte Punkt.

Determination.

Damit der Kreis die Linie AE erreiche, muss $p < \begin{Bmatrix} BE \\ AB \end{Bmatrix}$ und $p \geqq BH$ seyn, wenn BH perpendikular auf AE gefällt wird.

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } BAH &= \tfrac{1}{2}R \\ &= ABH \\ \hline \text{also } AH &= HB \\ \hline \text{folglich } 2BH &= AB^2 \\ \hline \text{mithin } BH^2 &= \tfrac{1}{2}AB^2 \\ \hline \text{also muss } p^2 &\geqq \tfrac{1}{2}AB^2 \text{ seyn.} \end{aligned}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p^2 \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \begin{cases} \tfrac{1}{2}AB^2, \\ BH^2 \end{cases} \text{ und } p < \begin{cases} AB \\ BE; \end{cases}$$

$$\overline{\text{also } p \geqq BH}$$

folglich berührt, oder schneidet den Kreis die Linie AE. Geschieht es in dem Punkte D,

$$\begin{aligned} \text{so ist } EB:BA &= DC:CA \\ \hline \text{mithin } DC &= CA \\ \hline \text{somit } DC^2 &= CA^2 \\ \hline \text{demnach } \left.\begin{matrix} DC^2 + CB^2 \\ BD^2 \\ p^2 \end{matrix}\right\} &= AC^2 + CB^2. \end{aligned}$$

Zusatz.

Es erhellet von selbst, dass es im Fall der Berührung des Kreises und der Linie AE einen einzigen Punkt auf der Linie AB im Fall des Durchschnitts einen zweiten mit der gegebenen Eigenschaft giebt. Auch bestimmt der Halbirungspunkt K der Linie AB eine kleinere Quadratsegmentensumme, als jeder andere Punkt derselben Linie, und jeder dem Punkt K näher liegende Punkt eine kleinere als der entferntere.

2. Algebr. Auflösung.

Bezeichnet man, um die Aufgabe algebraisch aufzulösen, die Linie AB mit a, die Entfernung des gesuchten Punktes C von dem Halbirungspunkt K der Linie AB mit x, so ist $BC = \frac{1}{2}a + x$, $AC = \frac{1}{2}a - x$, also soll nach den Bedingungen der Aufgabe werden

$$\left.\begin{array}{c}(\frac{1}{2}a+x)^2+(\frac{1}{2}a-x)^2\\ \frac{1}{4}a^2+ax+x^2+\frac{1}{4}a^2-ax+x^2\\ \frac{1}{2}a^2+2x^2\end{array}\right\} = p^2$$

$$\text{folglich } x^2 = \frac{p^2 - \frac{1}{2}a^2}{2}$$

$$\text{mithin } x = \pm\sqrt{\frac{p^2 - \frac{1}{2}a^2}{2}}$$

Wird AC mit y, also CB mit $a - y$ bezeichnet,

$$\text{so soll } \left.\begin{array}{c}y^2+(a-y^2)\\ y^2+2a^2-2ay+y^2\end{array}\right\} = p^2$$

$$\text{also } 2y^2 - 2ay = p^2 - a^2$$

$$\text{folglich } y^2 - ay = \frac{p^2 - a^2}{2}$$

$$\text{mithin } y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2 = \frac{p^2 - a^2 + \frac{1}{4}a^2}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}p^2 - \tfrac{1}{4}a^2$$

$$= \frac{p^2 - \tfrac{1}{2}a^2}{2}$$

---

somit $y = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{p^2 - \tfrac{1}{2}a^2}{2}}$ werden.

Die Werthe von $x = \pm \sqrt{\frac{p^2 - \tfrac{1}{2}a^2}{2}}$ bezeichnen offenbar keine anderen Linien, als die Linien CK, C'K, mithin liegen die Linien in gerade entgegen gesetzter Richtung, welche die Algebra durch die Zeichen $\pm$ unterscheidet.

Zusatz.

Die Werthe von $y = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{p^2 - \tfrac{1}{2}a^2}{2}}$, welche beide positiv sind, bezeichnen die Linien AC, AC', also liegen die mit dem Zeichen + behafteten Linien in einerley Richtung.

Aufgabe III. (Fig. 3.)

Durch einen gegebenen Kreis FEM eine gerade Linie FEH, einer gegebenen geraden Linie BA parrallel, zu ziehen, dass die Sehne FE zu dem zwischen dem Punkte E und der gegebenen geraden Linie AC liegenden Segmente EH in dem Verhältnisse der gegebenen geraden Linien p, q stehe.

Algebr. Auflösung.

Es sey FEH die gesuchte Linie, sey von des Kreises Mittelpunkte K ein Perpendikel KB auf die Linie AB gefällt, welches der Linie AC in C begegne, und sey CE gezogen, welche in ihrer Verlängerung der Linie AB in D begegne,

$$\text{so ist } \left.\begin{array}{l} GE:EH \\ BD:DA \end{array}\right\} \begin{array}{l} = \tfrac{1}{2}FE:EH \\ = \tfrac{1}{2}p:q \end{array}$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{l} BD+DA \\ AB \\ a \end{array}\right\} :BD = \tfrac{1}{2}p+q:\tfrac{1}{2}p \text{, wenn } AB=a \text{ gesetzt wird,}$$

$$\text{also } BD = \frac{\tfrac{1}{2}p}{\tfrac{1}{2}p+q}a$$

$= d$ zur Abkürzung.

Nun ist $CG:GE = CB:BD$

folglich $CG^2:GE^2 = CB^2:BD^2$

d. i. $(b+x)^2:r^2-x^2 = c^2:d^2$, wenn $CK=b$, $KE=r$, $CB=c$, $KG=x$ gesetzt wird.

$$\text{mithin } r^2-x^2 = \frac{d^2}{c^2}(b+x)^2$$

$$= \frac{d^2}{c^2}(b^2+2bx+x^2)$$

$$\text{somit } r^2-\frac{d^2}{c^2}b^2 = x^2+\frac{d^2}{c^2}x^2+2b\frac{d^2}{c^2}x$$

$$= \frac{c^2+d^2}{c^2}x^2+2b\frac{d^2}{c^2}x$$

$$\text{demnach } \frac{c^2}{c^2+d^2}\left(r^2-\frac{d^2}{c^2}b^2\right) = x^2+2b\frac{d^2}{c^2+d^2}x$$

$$\text{also } x^2+2b\frac{d^2}{c^2+d^2}x+b^2\frac{d^4}{(c^2+d^2)^2} = b^2\frac{d^4}{(c^2+d^2)^2}+\frac{c^2}{c^2+d^2}\left(r^2-\frac{d^2}{c^2}b^2\right)$$

$$\text{folglich } x = -b\frac{d^2}{c^2+d^2} \pm \sqrt{b^2\frac{d^4}{(c^2+d^2)^2}+\frac{c^2}{c^2+d^2}\left(r^2-\frac{d^2}{c^2}b^2\right)}$$

Zusatz 1.

Die Werthe von x sind nur dann möglich,

wenn $b^2\frac{d^4}{(c^2+d^2)^2}+\frac{c^2}{c^2+d^2}r^2 \overset{=}{>} \begin{cases}\frac{c^2}{c^2+d^2}\frac{d^2}{c^2}b^2\\[4pt] \frac{d^2}{c^2+d^2}b^2\end{cases}$

---

mithin $b^2\frac{d^4}{c^2+d^2}+c^2r^2 \overset{=}{>} d^2b^2$

---

demnach $c^2r^2 \overset{=}{>} \begin{cases} d^2b^2\left(1-\frac{d^2}{c^2+d^2}\right)\\[4pt] \frac{d^2b^2c^2}{c^2+d^2}\end{cases}$

---

somit $r^2 \overset{=}{>} \frac{d^2b^2}{c^2+d^2}$

---

also $r^2:b^2 \overset{=}{>} d^2:c^2+d^2$

d. i. $\left.\begin{matrix}MK^2:KC^2\\ \\ BL^2:LC^2\end{matrix}\right\} \overset{=}{>} BD^2:DC^2$, wenn die Tangente CM an den Kreis gelegt wird; , wenn man die Tangente bis zum Durchschnitt mit AB verlängert;

---

folglich $BL^2:\begin{Bmatrix}LC^2-BL^2\\ CB^2\end{Bmatrix} \overset{=}{>} BD^2:\begin{Bmatrix}DC^2-BD^2\\ CB^2\end{Bmatrix}$

---

mithin $LB \overset{=}{>} \begin{cases}BD\\[4pt] \frac{\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p+q}a\end{cases}$

---

somit $\begin{Bmatrix}a\\ AB\end{Bmatrix}:LB \overset{=}{<} \frac{1}{2}p+q:\frac{1}{2}p$

$$\text{demnach } \left.\begin{matrix}AB-BL\\ AL\end{matrix}\right\} : LB \begin{smallmatrix}=\\<\end{smallmatrix} q : \tfrac{1}{2}p$$

$$\text{also } AL : 2LB \begin{smallmatrix}=\\<\end{smallmatrix} q : p$$

$$\text{folglich } p : q \begin{smallmatrix}=\\<\end{smallmatrix} 2BL : LA.$$

Zusatz 2.

Von den Werthen von x ist der eine immer negativ, der andere wird positiv, oder $=0$, oder negativ, je nachdem

$$r^2 \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} \frac{d^2}{c^2} b^2$$

$$\text{also } r \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} \frac{d}{c} b$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix}r:b\\ OK:KC\\ \\ NB:BC\end{matrix}\right\} \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} \left\{\begin{matrix}d:c\\ DB:BC\end{matrix}\right.$$

, wenn OK ein auf CK perpendikular stehender Halbmesser ist; wenn die Verlängerung von CO der Linie AB in N begegnet;

$$\text{mithin } NB \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} BD$$

$$\text{somit } AB : BN \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \left\{\begin{matrix}AB : BD\\ \tfrac{1}{2}p + q : \tfrac{1}{2}p\end{matrix}\right.$$

$$\text{demnach}\ \left.\begin{matrix}AB-BN\\AN\end{matrix}\right\}:NB \substack{<\\=\\>} q:\tfrac{1}{2}p$$

$$\text{also}\ AN:2NB \substack{<\\=\\>} q:p$$

$$\text{folglich}\ p:q \substack{<\\=\\>} 2BN:NA.$$

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey FH die gesuchte Linie, so ist, die vorige Vorbereitung und Bezeichnung vorausgesetzt,

$$\begin{aligned} BD:DA &= GE:EH \\ &= \tfrac{1}{2}FE:EH \\ &= \tfrac{1}{2}p:q \end{aligned}$$

also ist, da die gerade Linie AB gegeben ist, der Punkt D, somit die gerade Linie CB gegeben.

Construction.

Man fälle von dem Mittelpunkte K des gegebenen Kreises das Perpendikel KB auf die Linie AB, verlängere dasselbe bis zum Durchschnitt mit der Linie AC, theile AB in D in dem Verhältnisse von $\tfrac{1}{2}p:q$, verknüpfe die Punkte C, D durch die gerade Linie DC, welche dem Kreise in E begegne, und lege durch E die Linie FH der Linie AB parallel, so ist dieselbe die gesuchte.

Determination.

Damit CD den Kreis erreiche, muss, wenn CL den Kreis in M berührt,

$$DB \substack{=\\<} BL \ \text{seyn}$$

$$\text{also } DB:BA \overset{=}{<} LB:BA$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} DB:\begin{Bmatrix}AB-BD\\ DA\end{Bmatrix}\\ \tfrac{1}{2}p:q\end{matrix}\right\} \overset{=}{<} LD:\begin{Bmatrix}AB-BL\\ LA\end{Bmatrix}$$

$$\text{mithin } p:q \overset{=}{<} 2\,BL:LA.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p:q \overset{=}{<} 2\,BL:LA$$

also $DB \overset{=}{<} BL$, wie aus der Determination hervorgeht; mithin erreicht die Linie CD den Kreis in einem Punkte E. Und es ist

$$GE:EH = BD:DN$$
$$= \tfrac{1}{2}p:q$$

$$\text{also } \begin{matrix}2GE\\ FE\end{matrix}\Big\}:EH = p:q.$$

Zusatz 1.

Die gerade Linie berührt, oder schneidet den Kreis, je nachdem $DB \overset{=}{<} BL$, also $p:q \overset{=}{<} 2\,BL:LA$. Es giebt also eine einzige Auflösung, oder eine zweite durch die Linie F′G′E′H′.

Zusatz 2.

Der Punkt G fällt auf die Verlängerung von CK, oder in K, oder auf CK selbst, je nachdem, wenn KO ein auf CK perpendicular stehender Radius und die gerade Linie CON gezogen ist, $BD \underset{>}{\overset{<}{=}} BN$,

also $DB:BA \gtreqless NB:BA$ ist,

folglich $BD:\left\{\begin{matrix} AB - BD \\ DA \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \\ \\ \tfrac{1}{2}p:q \end{matrix}\right\} \gtreqless NB:\left\{\begin{matrix} AB - BN \\ AN \end{matrix}\right.$

somit $p:q \gtreqless 2\,BN:NA.$

Zusatz 3.

Die Geometrie construirt eine Linie, oder zwey mit der gegebenen Eigenschaft, wenn die Algebra einen Werth, oder zwey für die unbekannte Linie darlegt.

Zusatz 4.

Die Geometrie legt den Punkt G auf die Verlängegerung von CK, in den Punkt K, zwischen die Punkte C, K, je nachdem die Algebra den Werth von KG positiv, = o, oder negativ bestimmt.

Zusatz 5.

Der von der Algebra unter allen Umständen negativ gefundene Werth von x wird von der Geometrie immer in die entgegengesetzte Richtung mit demjenigen, welchen die Algebra positiv nennt, gelegt.

Aufgabe IV.

In ein gegebenes Dreieck ABC ein Rechteck DEFG zu legen, dessen Flächenraum dem Quadrate der gegebenen geraden a gleich sey.

Algebraische Auflösung.

Es sey DEFG das gesuchte Rectangel, so ist, wenn AH perpendikular auf BC gefällt wird,

$$BD:DG = BA:AH$$
$$AD:DE = AB:BC$$

$$\text{also } AD.DB:ED.DG = AB^2:\begin{cases} AH.BC \\ AB.CO \end{cases}$$
$$= AB:CO$$

Ist P der Halbirungspunkt von AB, und setzt man $PD=x$, so ist $AD=\frac{1}{2}AB-x$, $BD=\frac{1}{2}AB+x$,

$$\text{also } AD.DB=\tfrac{1}{4}AB^2-x^2$$

$$\text{folglich } \tfrac{1}{4}AB^2-x^2:\begin{Bmatrix} ED.DG \\ a^2 \end{Bmatrix}=AB:CO$$

$$\text{mithin } \tfrac{1}{4}AB^2-x^2=\frac{AB}{CO}a^2$$

$$\text{somit } \tfrac{1}{4}AB^2-\frac{AB}{CO}a^2=x^2$$

$$\text{demnach } c=\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}AB^2-\frac{AB}{CO}a^2}$$

Zusatz 1.

Damit die Werthe von x möglich werden,

$$\text{muss } \tfrac{1}{4}AB^2 \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \frac{AB}{CO}a^2 \text{ seyn.}$$

$$\text{also } \begin{rcases} \tfrac{1}{4}AB.CO \\ \tfrac{1}{2}\triangle ABC \end{rcases} \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} a^2.$$

Zusatz 2.

Die Algebra zeigt eine, oder 2 Auflösungen an, je nachdem $\frac{1}{2}\triangle ABC \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} a^2$ ist. In dem ersten Falle fällt der Punkt D in den Punkt P, im zweiten werden die Entfernungen der Punkte D von P durch absolut gleiche, aber mit entgegengesetzten Zeichen versehene Werthe von x angedeutet.

Zusatz 3.

Würde man BD=y setzen, so wäre

$$y = \frac{1}{2} AB \pm \sqrt{\frac{1}{4}AB^2 - \frac{AB}{CO}a^2}.$$

Man erhielte also, wenn nicht $\frac{1}{4}AB^2 = \frac{AB}{CO}a^2$, zwey einander ungleiche positive Werthe von y.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey DEFG das gesuchte Rechteck, so ist, wie oben, AB.DB : ED.DG = AB^2 : AB.CO. Da ED.DG, AB^2, AB.CO gegeben sind, so ist AD DB, und weil AD+DB gegeben ist, der Punkt D gegeben.

Construction.

Man fälle von C auf AB das Perpendikel CO, ziehe durch A die Linie LK♯CO, die Linie CL♯AB, mache RA=AL, beschreibe über BR einen die Linie AK in K schneidenden Halbkreis, nehme AQ=a, ziehe die gerade Linie KR, derselben die Linie QM parallel, lege durch den Durchschnitt M der Linie QM mit AK die Linie MN♯AB, beschreibe über AB einen Halbkreis, welcher die Linie MN in N erreiche, fälle von N ein Perpendikel ND auf AB, und ziehe die Linien DG, DE den Linien AH, BC, wovon jene auf dieser perpendikular steht, parallel, mache auch EF auf BC perpendikular, so ist DEFG das gesuchte Rechteck.

Determination.

Damit der Kreis der Linie MN begegne,

muss $AM \leqq \frac{1}{2}AB$ seyn;

also $AM^2 \leqq \frac{1}{4}AB^2$

$$\text{folglich } AM^2 : \begin{Bmatrix} a^2 \\ AQ^2 \end{Bmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ KA^2 : AR^2 \\ AB^2 : AK^2 \\ \frac{1}{4}AB^2 : \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}AB.CO \\ \frac{1}{2}\triangle ABC \end{Bmatrix} \end{matrix}\right\} \leqq \frac{1}{4}AB^2 : a^2$$

mithin $\frac{1}{2}\triangle ABC \geqq a^2$.

Beweis.

Es ist $\frac{1}{2}\triangle ABC \geqq a^2$ (Det.)

also $AM \leqq \frac{1}{2}AB$,

wie aus der Determination hervorgehet. Also berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN. Ferner ist

$$\left.\begin{matrix} MA^2 : AQ^2 \\ AD.DB : a^2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = KA^2 : AR^2 \\ = BA^2 : \begin{Bmatrix} AK^2 \\ AH.BC \end{Bmatrix} \\ = AD.DB : ED.DG \text{ (Anal.)} \end{matrix}$$

folglich $AD.DB = a^2$.

Zusatz 1.

Die Geometrie giebt eine, oder zwey Auflösungen, je nachdem der Kreis die Linie MN berührt, oder schneidet, d. i. je nachdem $\frac{1}{2}\triangle ABC \geqq a^2$. Im ersten Fall fällt der Punkt D in den Punkt P, im anderen fallen die Punkte D auf die beiden Seiten des Punktes P in gleichen Entfernungen von demselben.

Zusatz 2.

Die Linien, welche die Algebra durch die Zeichen + — unterscheidet, sind ohne Zweifel die auf beiden Seiten des Punktes P einander gleichen Linien PD, PD', und beide Punkte D, D' bestimmen eine Auflösung in dem Sinne der Aussage, jener durch das Rechteck DEFG, dieser durch das Rechteck D'E'F'G'.

Zusatz 3.

Die Linien, welche die Algebra als positive Linien bezeichnet, wie die Werthe von $y = BD$, BD', werden von der Geometrie von einem Punkte aus in einerley Richtung gelegt.

Aufgabe V. (Fig. 5.)

Zwey Lichter, A, B, welche in einer Entfernung von a Fuss von einander stehen, leuchten, das eine, A, mit einer neunmal so grossen Stärke, als das andere, B. Man fragt, welcher Punkt der geraden Linie AB von beiden Lichtern gleich stark beleuchtet werde.

Algebraische Auflösung.

Bezeichnet man die Entfernung des gesuchten Punktes C von A durch x, also die Entfernung desselben von B durch $a-x$, so muss aus optischen Gründen seyn

$$\frac{9}{x^2} = \frac{1}{(a-x)^2}$$

$$\text{also } 9 = \frac{x^2}{(a-x)^2}$$

$$= \left(\frac{x}{a-x}\right)^2$$

folglich $\pm 3 = \frac{x}{a-x}$

mithin entweder $3a - 3x = x$, oder $-3a + 3x = x$

folglich entweder $3a = 4x$, oder $-3a = -2x$

somit $\frac{3}{4}a = x$, oder $\frac{3}{2}a = x$.

Würde man die Linie BC durch y, also AC durch a—y bezeichnen, so müsste die Gleichung statt finden

$$\frac{9}{(a-y)^2} = \frac{1}{y^2}$$

also $9 = \left(\frac{a-y}{y}\right)^2$

folglich $\pm 3 = \frac{a-y}{y}$

mithin entweder $3y = a - y$, oder $-3y = a - y$

also $4y = a$, oder $2y = -a$

folglich $y = \frac{1}{4}a$, oder $y = -\frac{1}{2}a$.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey C der gesuchte Punkt, so wäre

$AC^2 : CB^2 = 9 : 1$

also $AC : CB$, somit der Punkt C gegeben.

Construction.

Man lege unter einem beliebigen Winkel die Linie AD an AB, nehme AD = 9, DG = 1, beschreibe über AG als Durchmesser einen Kreis, errichte in D die Sehne EE′ perpendikular auf AD, nehme FD = DE, F′D = DE′, ziehe die geraden Linien FB, F′B, und diesen parallel die Linie DC, DC′, so sind C, C′ die gesuchten Punkte.

Beweis.

Es ist $AC : CB = AD : \begin{cases} DF \\ DE \end{cases}$

---

also $AC^2 : CB^2 = AD^2 : \begin{cases} DE^2 \\ AD.DG \end{cases}$

$= AD : DG$

$= 9 : 1.$

Eben so ist $AC' : CB' = AD : \begin{cases} DF' \\ DE' \end{cases}$

---

also $AC'^2 : C'B^2 = AD^2 : \begin{cases} DE'^2 \\ AD.DG \end{cases}$

$= AD : DG$

$= 9 : 1.$

Zusatz.

Die Geometrie construirt die Linien AC, AC′, welche die Algebra durch $+\frac{3}{4}a$, $+1\frac{1}{2}a$ ausdrückt, von dem Puncte A aus in einerley Richtung, hingegen die Linien BC, BC′, welche die Algebra durch $+\frac{1}{4}a$, $-\frac{1}{2}a$ bezeichnet, von dem Punkte B aus in entgegengesetzten Richtungen.

Aufgabe VI. (Fig. 6.)

Auf der gegebenen geraden Linie AB, oder ihrer Verlängerung einen Punkt D zu finden, so dass AD zu der Entfernung dieses Punktes von dem Endpunkte C des in B auf der Linie AB aufgerichteten Perpendikels BC, dessen Länge gegeben ist, in dem Verhältnisse 2:1 stehe.

Algebraische Auflösung.

1. Setzt man zur Bestimmung des Punktes D die Linien $CB = b$, $BD = x$, $AB = a$, also $AD = a - x$, so erfodert die Aufgabe, dass

$$a - x = 2\sqrt{(b^2 + x^2)} \text{ werde,}$$

$$\text{also } a^2 - 2ax + x^2 = 4b^2 + 4x^2$$

$$\text{folglich } a^2 - 4b^2 = 3x^2 + 2ax$$

$$\text{mithin } \frac{a^2 - 4b^2}{3} = x^2 + \tfrac{2}{3}ax$$

$$\text{somit } \left.\begin{array}{l} \tfrac{1}{9}a^2 + \dfrac{a^2 - 4b^2}{3} \\ \tfrac{4}{9}a^2 - \tfrac{4}{3}b^2 \\ \tfrac{4}{9}(a^2 - 3b^2) \end{array}\right\} = (x + \tfrac{1}{3}a)^2$$

$$\text{demnach } x = -\tfrac{1}{3}a \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{(a^2 - 3b^2)}.$$

Zusatz 1.

Damit der Werth von x möglich werde, muss $a^2 \geqq 3b^2$ seyn.

Zusatz 2.

Der erste Werth von x wird positiv, oder $= 0$, oder negativ, je nachdem

$$\tfrac{1}{3}a \overset{<}{\underset{>}{=}} \tfrac{2}{3}\sqrt{(a^2-3b^2)}$$

$$\text{also}\quad \tfrac{1}{9}a^2 \overset{<}{\underset{>}{=}} \tfrac{4}{9}a^2-\tfrac{4}{3}b^2$$

$$\text{folglich}\quad \tfrac{4}{3}b^2 \overset{<}{\underset{>}{=}} \tfrac{1}{3}a^2$$

$$\text{mithin}\quad 4b^2 \overset{<}{\underset{>}{=}} a^2$$

$$\text{somit}\quad 2b \overset{<}{\underset{>}{=}} a \quad \text{ist.}$$

2. Setzt man $AD = y$, also $BD = a - y$, folglich $DC^2 = (a-y)^2+b^2$, so muss, damit der Aufgabe Genüge geschehe, seyn

$$y^2 = 4\big((a-y)^2+b^2\big)$$
$$= 4a^2-8ay+4y^2+4b^2$$

$$\text{demnach}\quad -4(a^2+b^2) = 3y^2-8ay$$

$$\text{also}\quad -\tfrac{4}{3}(a^2+b^2) = y^2-\tfrac{8}{3}ay$$

$$\text{folglich}\quad \left.\begin{matrix}\tfrac{16}{9}a^2-\tfrac{4}{3}(a^2+b^2)\\ \tfrac{4}{9}a^2-\tfrac{4}{3}b^2\\ \tfrac{4}{9}(a^2-3b^2)\end{matrix}\right\} = (y-\tfrac{4}{3}a)^2$$

mithin $\left.\begin{matrix}\frac{4}{3}a \pm \frac{2}{3}\sqrt{(a^2 - 3b^2)} \\ \frac{2}{3}(2a \pm \sqrt{(a^2 - 3b^2)})\end{matrix}\right\} = y.$

Zusatz.

Beide Werthe von y sind, so lange die Aufgabe möglich ist, positiv.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey D der gesuchte Punkt, also AD : DC = 2 : 1, so ist, wenn BL der Linie DC parallel gezogen, und bis zum Durchschnitt mit der verlängerten geraden Linie DC verlängert wird,

$$AB : BL = AD : DC$$
$$= 2 : 1;$$

also ist BL der Länge nach, und weil sie an die der Lage nach gegebene gerade Linie AC gezogen ist, auch der Lage nach, mithin die gerade Linie CD der Lage nach, somit der Punkt D gegeben.

Construction.

Man halbire die gerade Linie AB in M, beschreibe aus B als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = BM, und verbinde den Punkt L, in welchem der Kreis die gerade Linie AC, oder ihre Verlängerung erreicht, mit dem Punkte B durch die gerade Linie BL, so ist, wenn die gerade Linie CD der Linie BL parallel gezogen wird, der Durchschnitt D derselben mit AB, oder ihrer Verlängerung, der gesuchte Punkt.

Determination.

Damit der Kreis die Linie AC erreiche, muss, wenn das Perpendikel BK auf AC gefällt wird,

$$\left.\begin{array}{r} BM \\ \frac{1}{2}AB \end{array}\right\} \substack{=\\>} BK \text{ seyn;}$$

$$\text{also } \tfrac{1}{2}AB.AC \substack{=\\>} \left\{\begin{array}{l} AC.BK \\ AB.BC: \end{array}\right.$$

$$\text{folglich } AC \substack{=\\>} 2BC$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{r} AC^2 \\ AB^2+BC^2 \end{array}\right\} \substack{=\\>} 4BC^2$$

$$\text{somit } AB^2 \substack{=\\>} 3BC^2.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } AB^2 \substack{=\\>} 3BC^2 \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{r} AB^2+BC^2 \\ AC^2 \end{array}\right\} \substack{=\\>} 4BC^2.$$

$$\text{folglich } AC \substack{=\\>} 2BC$$

$$\text{mithin } \tfrac{1}{2}BA.AC \substack{=\\>} \left\{\begin{array}{l} AB.BC \\ AC.BK \end{array}\right.$$

$$\text{somit } \left.\begin{array}{r} \frac{1}{2}AB \\ BM \end{array}\right\} \substack{=\\>} BK;$$

demnach berührt, oder schneidet der Kreis die Linie AC.

Geschieht es in L, so ist $AD : DC = AB : \left\{\begin{matrix} BL \\ BM \end{matrix}\right.$

$= 2 : 1.$

Zusatz 1.

Im Fall der Berührung der Linie AC durch den Kreis giebt es eine einzige Auflösung, im Fall des Scheidens zwey Auflösungen der Aufgabe.

Zusatz 2.

Ist $AB < 2BC$, also $MB < BC$, so fallen die Punkte, in welchen der Kreis mit der Linie AC zusammen kommt, zwischen A, C, also die Punkte, welche die Aufgabe auflösen, auf die Verlängerung von AB. Ist $AB = 2BC$, also $MB = BC$, so fällt der eine Durchschnitt mit C zusammen, der andere liegt zwischen A, K, also liegt der eine der gesuchten Punkte in B, der andere auf der Verlängerung von AB. Ist $AB > 2BC$, also $MB > BC$, so fällt der eine Durchschnitt auf die Verlängerung von AC, der andere auf AC, mithin liegt der eine der gesuchten Punkte zwischen A, B, der andere auf der Verlängerung von AB.

Zusatz 3.

Die Algebra und Geometrie stimmen auf das genaueste mit einander überein. Unter denselben Bedingungen, unter welchen die Algebra einen, oder zwey Werthe für die gesuchte Linie aufstellt, giebt die Geometrie eine, oder zwey Auflösungen.

Zusatz 4.

Die Geometrie construirt die geraden Linien, welche die Algebra durch die Zeichen + — unterschei-

det, in Richtungen, welche von einem Punkte aus genommen einander gerade entgegengesetzt sind. Die Linien hingegen, welchen die Algebra dasselbe Zeichen leiht, wie AD, AD', construirt die Geometrie in derselben Richtung.

Zusatz 5.

Der negative Werth von x löset die Aufgabe in demselben Sinne auf, in welchem der positive sie auflöset.

Zusatz 6.

Die oben gefundenen Werthe von y erhält man auch dadurch, dass man die Werthe von x von a abzieht. Es ist nämlich $a - (-\frac{1}{3}a \pm \frac{2}{3}\sqrt{(a^2 - 3b^2)}) = \frac{4}{3}a \mp \frac{2}{3}\sqrt{(a^2 - 3b^2)}$. Daraus gehet hervor, dass man, um die Entfernung der Punkte A und D' zu erhalten, wenn $AB = a$ gesetzt, und BD' durch das Zeichen — ausgedrückt wird, von a den Werth von BD' abziehen, nicht aber dazu addiren muss.

Aufgabe VII. (Fig. 7.)

Eine gegebene gerade Linie $AB = a$ in zwey Segmente AC, CB zu theilen, dass das Rechteck aus denselben dem Quadrate der gegebenen geraden Linie b gleich sey.

Algebr. Auflösung.

1. Es sey D der Halbirungspunkt von AB, C der gesuchte Punkt, $DC = x$, so muss seyn

$$\frac{1}{4}a^2 - x^2 = b^2$$

$$\text{also } x^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b^2$$

$$\text{folglich } x = \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}.$$

2. Setzt man $AC = y$, so muss seyn

$$\left.\begin{array}{l} y(a-y) \\ ay - y^2 \end{array}\right\} = b^2$$

$$\text{mithin } y^2 - ay + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b^2$$

$$\text{somit } y = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}.$$

Geometrische Behandlung.

Man beschreibe über AB einen Halbkreis, richte in dem Mittelpunkte D den Halbmesser DE perpendikular auf AB auf, nehme auf demselben DH = b, ziehe HK ⧣ AB, und fälle von dem Durchschnitte K der Linie HK mit dem Halbkreise ein Perpendikel KC auf AB, so ist C der gesuchte Punkt.

Determination.

Damit HK dem Kreise begegne, muss $b \begin{array}{c} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} DE \\ \tfrac{1}{2}AB \end{array} \right.$ seyn.

Beweis.

$$\text{Es ist } b \begin{array}{c} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}AB \\ DE, \end{array} \right.$$

also berührt, oder schneidet die Linie HK den Kreis. Geschieht es in K, so ist $AC.CB = CK^2 = DH^2 = b^2$, folglich ist C der gesuchte Punkt.

Zusatz 1.

Es giebt einen Punkt C mit den gegebenen Eigenschaften, oder einen zweiten, je nachdem der Kreis berührt, oder geschnitten wird.

Zusatz 2.

Die durch $x = \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$ bezeichneten Linien sind die einander gleichen Linien DC, DC′. Die durch $y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$ angedeuteten Linien sind AC′, AC. Es liegen also die durch die Zeichen (+—) unterschiedenen Linien von einem Punkte aus in gerade entgegengesetzter, die mit dem Zeichen + behafteten in einerley Richtung.

Zusatz 3.

Es ist $y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)} = \frac{1}{2}a - (\mp \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)})$ Ist also DC′ mit dem Zeichen (+), DC mit dem Zeichen (—) versehen, so erhält man den Werth von AC′ nicht dadurch, dass man den Werth von DC′ zu dem von AD addirt, sondern dadurch, dass man den von DC′ von dem von AD abzieht.

Aufgabe VIII. (Fig. 8.)

Auf einer gegebenen geraden Linie AB einen Punkt C zu finden, dass die Entfernung desselben von dem Punkte B die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen seiner Entfernung von dem Punkte A u. der Linie AB sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey der Punkt C so gefunden,

dass AB : BC = BC : CA

so ist $BA \cdot AC = BC^2$

also $\left.\begin{matrix}BA.AC+AB.BC\\ AB^2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}BC^2+AB.BC\\ (AB+BC)BC\end{matrix}\right.$;

folglich ist BC der Grösse nach, mithin der Punkt C gegeben.

Construction.

Man beschreibe über AB das Quadrat ABDE, halbire die Seite BD in K, beschreibe aus K als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $=$ KA, welcher die verlängerte DB in F schneide, und mache CB $=$ BF, so ist C der gesuchte Punkt.

Beweis.

$$\begin{aligned}\text{Es ist } DF.FB+BK^2 &= KF^2 \text{ (El. II. 6.)}\\ &= KA^2\\ &= AB^2+BK^2\end{aligned}$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix}DF.FB\\ (AB+BC)CB\end{matrix}\right\} = AB^2$$

$$\begin{aligned}\text{mithin } BC^2 &= AB^2-AB.BC\\ &= BA.AC\end{aligned}$$

$$\text{somit } AB:BC = BC:CA.$$

Zusatz.

Nimmt man den zweiten Durchschnitt F′ des Kreises und der Verlängerung der Linie BD, so ist auch

$$\begin{aligned}DF'.F'B+DK^2 &= KF^2\\ &= KA^2\\ &= AB^2+BK^2\end{aligned}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}DF'.F'B\\ (BC'-BA)BC'\end{matrix}\right\} = AB^2$$

, wenn C′B $=$ BF gemacht wird;

$$\text{folglich } BC'^2 = AB^2 + AB.BC'$$
$$= BA.AC'$$

$$\text{mithin } AB:BC' = BC':C'A;$$

demnach ist auch auf der Verlängerung von AB ein Punkt C' gefunden worden, welcher eine Linie BC' mit den gegebenen Eigenschaften bestimmt.

Algebr. Auflösung.

Bezeichnet man die Linie BC mit x, BA mit a, also AC mit a—x,

$$\text{so ist } x^2 = a(a-x)$$

$$\text{also } a^2 + ax = a^2$$

$$\text{folglich } x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2$$

$$\text{mithin } x + \tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{(\tfrac{5}{4}a^2)}$$

$$\text{somit } x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{5}{4}a^2)}.$$

Zusatz 1.

Da die Werthe von x nur die Linien CB, CB' bezeichnen können, so liegt wieder der negative mit dem positiven in gerade entgegengesetzter Richtung, und die Linien FK, F'K sind die durch die Werthe $\pm\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$ bezeichneten Linien, welche einander entgegengesetzt liegen.

Zusatz 2.

Bezeichnet man AC durch y, so erhält man, unabhängig von obiger Rechnung, die Gleichung

$$ay = (a-y)^2$$
$$= a^2 - 2ay + y^2$$

$$\text{also } -a^2 = y^2 - 3ay$$

$$\text{folglich} \left.\begin{matrix} \frac{9}{4}a^2 - a^2 \\ \frac{5}{4}a^2 \end{matrix}\right\} = (y - \tfrac{3}{2}a)^2$$

$$\text{mithin } y = \tfrac{3}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$= a + \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$= a - (-\tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}.$$

Gleichwie man, um die Linie AC zu erhalten, die mit dem Zeichen $(+)$ behaftete Linie $BC = +(-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2})$ von AB abziehen muss, so hat man, wenn den Vorschriften der Algebra Genüge geschehen soll, um die Linie AC zu erhalten, die mit dem Zeichen $(-)$ versehene Linie BC′ von AB abzuziehen.

Anmerkung.

Um zu zeigen, dass es zu Absurditäten führe, wenn man zwey durch die Zeichen $(+ -)$ von einander unterschiedene Linien immer in Richtungen, welche von einem Punkte aus einander gerade entgegengesetzt liegen, suchen wollte, sucht Carnot, in dem discours préliminaire der Géométrie de Position, in der Gleichung für den Kreis, $y^2 = 2ax - x^2$, den Werth von $y = \pm \sqrt{2ax - x^2}$, für $x = a$. Er findet $y = \pm a$, und fügt hinzu, dass, wenn $AK = +a$, $KB = -a$ gesetzt werden sollte, der Werth von $AB = +a + (-a)$ $= o$ seyn müsste.

In den Zusätzen zu Aufgabe 6. 7. 8. liegt der Beweis dafür, dass, wenn $KB = -a$, $AK = +a$ gesetzt wird, der Werth von AB nicht dadurch gefunden wird, dass $AK = +a$, $KB = -a$ zu einander hinzugefügt werden, sondern dadurch, dass man sie von einander abzieht. Es ist $AB = +a - (-a) = 2a$.

Aufgabe IX. (Fig. 9.)

Einen Kreis zu beschreiben, welcher die Schenkel eines gegebenen rechten Winkels EAD, und einen aus der Spitze A der rechten Winkels, als Mittelpunkte, mit gegebenem Radius EA beschriebenen Kreis berühre.

Geometrische Auflösung.

Analysis.

Es sey O der Mittelpunkt, OC der Radius des gesuchten Kreises, so ist, wenn man die Perpendikel OC, OB auf die Schenkel AB, AC fällt, BO = OC, also halbirt AO den Winkel BAC, mithin ist AO der Lage nach gegeben. Ferner ist wegen der gegebenen Winkel des Dreieckes AOC dieses Dreieck der Art nach gegeben, also $AO : \begin{cases} OC \\ OG \end{cases}$ gegeben, folglich, da AG der Lage und Grösse nach gegeben ist, der Punkt O, somit der Radius OC gegeben.

Construction.

Man halbire den Winkel DAE durch den Radius AG, fälle von G ein Perpendikel GH auf den Schenkel AE, und ziehe den Endpunkt D des anderen Schenkels mit H durch eine gerade Linie zusammen, so ist der Durchschnitt O der Linien AG u. DH der Mittelpunkt, und das auf AE gefällte Perpendikel OC der Radius des gesuchten Kreises.

Beweis.

Da O auf der Halbirungslinie des Winkels DAE liegt, so ist OAC = OAB, also ist BO = OC, wenn OB, OC Perpendikel auf AB, AC sind, und der Kreis berührt die Schenkel in B, C.

$$\text{Da } AO : OC = \left.\begin{matrix} AG \\ AD \end{matrix}\right\} : GH$$
$$= AO : OG$$

so ist $OC = OG$;

mithin lauft der Kreis, welcher O zum Mittelpunkte hat, durch G, und berührt in G den gegebenen Kreis.

Zusatz.

Zieht man den anderen Endpunkt K des Durchmessers DK des gegebenen Kreises mit H durch die gerade Linie KH zusammen, und verlängert dieselbe bis zum Durchschnitte O′ mit der verlängerten AG, so ist auch O′ der Mittelpunkt, und O′C′ oder O′B′, wenn diese Linien auf den Schenkeln des gegebenen Winkels perpendikular stehen, der Radius eines, jene Schenkel in B, C, und den gegebenen Kreis in G berührenden, Kreises, wie von selbst erhellet.

Algebraische Auflösung.

Es sey $\left.\begin{matrix} GO \\ OC \end{matrix}\right\} = x$

so ist $AO^2 = 2x^2$

also $AO = \sqrt{2x^2}$

folglich $\sqrt{2x^2} + x = AG$

$= r$, wenn der Radius $= r$ gesetzt wird;

mithin $\sqrt{2x^2} = r - x$

somit $2x^2 = r^2 - 2rx + x^2$

demnach $x^2 + 2rx = r^2$

$$\text{also } x^2 + 2rx + r^2 = 2r^2$$

$$\text{folglich } x = -r \pm \sqrt{2r^2}$$
$$= -r \pm r\sqrt{2}$$
$$= r(-1 \pm \sqrt{2}).$$

Zusatz 1.

Es hat x zwey Werthe, indem x entweder $= + r(-1 + \sqrt{2})$ oder $= - r(1 + \sqrt{2})$ ist, wovon jener Werth den oben gefundenen Radius GO, dieser den Radius GO′ bezeichnet. Beide liegen einander entgegengesetzt, gleich wie die Algebra ihnen die entgegengesetzten Zeichen beilegt, und beide lösen die Aufgabe im Sinne der Aussage auf. Ein Beweis, wie nothwendig es ist, die negativen Werthe der Wurzeln nicht ausser Acht zu lassen.

Zusatz 2.

$$\text{Setzt man } AO = y, \text{ also } OC^2 = \tfrac{1}{2} y^2$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} OC \\ OG \end{matrix}\right\} = \sqrt{\tfrac{1}{2} y^2}$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} AO + OG \\ r \end{matrix}\right\} = y + \sqrt{\tfrac{1}{2} y^2}$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} (r - y)^2 \\ r^2 - 2ry + y^2 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2} y^2$$

$$\text{demnach } 2r^2 - 4ry + 2y^2 = y^2$$

$$\text{also } y^2 - 4ry + r^2 = 2r^2$$

$$\text{folglich } y = 2r \pm \sqrt{2r^2}$$
$$= r(2 \pm \sqrt{2});$$

mithin hat y zwey positive Werthe, wodurch die Linien AO, AO′ bezeichnet werden. Ein Beweis, dass Linien,

welche von einem Punkte aus auf einer geraden Linie in einerley Richtung liegen, von der Algebra mit einerley Zeichen versehen werden.

Aufgabe X. (Fig. 10.)

Von der Spitze B des gegebenen Dreieckes ABC eine gerade Linie BE zur Grundlinie AC zu ziehen, welche die mittlere Proportionallinie zwischen den Segmenten AE, EC der Grundlinie werde.

Algebraische Auflösung.

Fällt man auf die Grundlinie das Perpendikel BD, und setzt man BD = h, das grössere Segment AD = a, CD = b, DE = x, also AE = a+x, CE = b—x, so muss, weil AE : EB = BE : EC, also AE.EC = BE² werden soll, die Gleichung statt finden

$$\left.\begin{array}{l}(a+x)(b-x)\\ ab+bx-ax-x^2\end{array}\right\} = h^2+x^2$$

$$\text{folglich } ab-h^2 = 2x^2+(a-b)x$$

$$\text{mithin } \frac{ab-h^2}{2}+\frac{(a-b)^2}{16} = \left(x+\frac{a-b}{4}\right)^2$$

$$\text{somit } x = -\frac{a-b}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{(a-b)^2}{16}+\frac{ab-h^2}{2}\right)}$$

$$= -\frac{a-b}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{(a-b)^2}{16}+\frac{8(ab-h^2)}{16}\right)}$$

$$= \frac{-(a-b) \pm \sqrt{((a-b)^2+8(ab-h^2))}}{4}$$

$$= \frac{-(a-b) \pm \sqrt{((a-b)^2-8(h^2-ab))}}{4}$$

Zusatz 1.

Die Werthe von x werden real, wenn $ab \geqq h^2$, d. h. wenn das Dreieck an der Spitze einen rechten, oder einen stumpfen Winkel hat. Damit der Werth von x auch dann real werde, wenn der Winkel an der Spitze ein spitzer ist, muss $(a-b)^2 \geqq 8(h^2-ab)$ seyn.

$$\text{also } \left.\begin{matrix} (a-b)^2+8\,ab \\ (a+b)^2+\left\{\begin{matrix} 4\,ab \\ (a+b^2)-(a-b)^2 \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\} \geqq 8\,h^2$$

$$\text{somit } 2\,(a+b)^2 \geqq 8\,h^2+(a-b)^2.$$

Zusatz 2.

Der obere Werth von x ist positiv, oder $=0$, oder negativ, je nachdem $ab \gtreqless h^2$, d. h., je nachdem das Dreieck an der Spitze einen stumpfen, einen rechten, oder einen spitzen Winkel hat. Der untere Werth von x ist unter allen Umständen negativ.

Zusatz 3.

Den Werth von AE erhält man, wenn man zu $AD=a$ den Werth von x addirt. Es ist also

$$AE = a+\frac{-(a-b)\pm\sqrt{((a-b^2)-(8h^2-ab))}}{4}$$

$$= \frac{4a-(a-b)\pm\sqrt{((a-b)^2-8(h^2-ab))}}{4}$$

welche Werthe positiv sind.

Zusatz 4.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Da } BD:DE \\ \quad h:x\end{array}\right\} = 1 : \tan.EBD,$$

$$\text{so ist } \tan.EBD = \frac{x}{h}$$

$$= \frac{-(a-b) \pm \sqrt{((a-b)-8(h^2-ab))}}{4h}$$

Es hat also tan.EBD, wie x, zwey einander ungleiche Werthe, wovon der obere mit x positiv, = 0, oder negativ wird, der untere immer negativ ist.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey BE die gesuchte Linie,

so ist $BE^2 = AE.EC$

$= BE.EF$, wenn um das Dreieck ABC ein Kreis beschrieben, und BE bis zum Durchschnitte mit demselben in F verlängert wird, also ist auch BE = EF. Verlängert man das Perpendikel BD bis zum Durchschnitte K mit einer durch F der Linie AC parallel gelegten Linie FK, so ist BD:DK=BE:EF, folglich auch BD = DK, mithin ist der Punkt K, somit der Punkt F, als Durchschnitt der durch K mit AC parallel gelegten Linie KF mit dem um das Dreieck gelegten Kreise, und die gerade Linie BEF gegeben.

Construction.

Man beschreibe um das Dreieck einen Kreis, fälle von der Spitze B auf die Grundlinie das Perpendikel BD, verlängere dasselbe über D hinaus um KD = DB, lege durch K die Linie KF der Linie AC parallel, und verbinde den Durchschnitt F derselben und des Kreises mit dem Punkte B durch die gerade Linie BF, welche die Grundlinie in E schneide, so ist BE die gesuchte Linie.

Determination.

Hat das Dreieck bey B einen spitzen Winkel, so liegt der Punkt K ausserhalb des Kreises, also muss, damit KF dem Kreise begegne, KD $\overline{\gtrless}$ LM seyn, wenn AL = LC gemacht, und LM auf AC perpendikular aufgerichtet, auch bis zum Durchschnitte mit dem Kreise verlängert worden ist.

$$\text{Nun ist } \left.\begin{matrix}AL\\ \frac{a+b}{2}\end{matrix}\right\} : LM = 1 : \left\{\begin{matrix}\tan.CAM\\ \tan.\frac{1}{2}ABC\end{matrix}\right.$$

$$\text{also } LM = \tfrac{1}{2}(a+b)\tan.\tfrac{1}{2}ABC.$$

$$\text{Ferner ist } \left.\begin{matrix}BD:DA\\ h:a\end{matrix}\right\} = 1 : \tan.ABD, \quad \left.\begin{matrix}BD:DC\\ h:b\end{matrix}\right\} = 1 : \tan.CBD$$

$$\text{folglich } \tan.ABD = \frac{a}{h}, \quad \tan.CBD = \frac{b}{h}$$

$$\text{somit } \tan.ABD.\tan.CBD = \frac{a.b}{h^2};$$

$$\text{demnach } \tan.ABC\,(= \tan.(ABD+CBD)) = \frac{\frac{a}{h}+\frac{b}{h}}{1-\frac{ab}{h^2}} = \frac{(a+b)\,h}{h^2-ab}$$

$$\text{mithin } (\tan.ABC)^2 = \frac{(a+b)^2h^2}{(h^2-ab)^2}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}1+(\tan.ABC)^2\\ (\sec.ABC)^2\end{matrix}\right\} = \frac{(h^2-ab)^2+(a+b)^2h^2}{(h^2-ab)^2}$$

$$\text{folglich } \sec.ABC - 1 = \frac{\sqrt{((h^2-ab)^2+(a+b)^2h^2)}-(h^2-ab)}{h^2-ab}$$

$$\text{mithin}\ \left.\begin{array}{c}\dfrac{\sec.ABC-1}{\tan.ABC}\\ \tan.\tfrac{1}{2}ABC\end{array}\right\} = \frac{\sqrt{((h^2-ab)^2+(a+b)^2h^2)}-(h^2-ab)}{(a+b)h}$$

$$\text{som.}\ \left.\begin{array}{c}\tfrac{1}{2}(a+b)\tan.\tfrac{1}{2}ABC\\ LM\end{array}\right\} = \frac{\sqrt{((h^2-ab)^2+(a+b)^2h^2)}-(h^2-ab)}{2h}$$

$$\text{demnach muss seyn}\ h \stackrel{=}{<} \frac{\sqrt{((h^2-ab)^2+(a+b)^2h^2)}-(h^2-ab)}{2h}$$

$$\text{also}\ 2h^2+h^2-ab \stackrel{=}{<} \sqrt{((h^2-ab)^2)+(a+b)^2h^2}$$

$$\text{folglich}\ 4h^4+4h^2(h^2-ab)+(h^2-ab)^2 \stackrel{=}{<} (h^2-ab)^2+(a+b)^2h^2$$

$$\text{mithin}\ \left.\begin{array}{l}4h^2+4(h^2-ab)\\ 8h^2-\left\{\begin{array}{c}4ab\\ (a+b)^2-(a-b)^2\end{array}\right\}\end{array}\right\} \stackrel{=}{<} (a+b)^2$$

$$\text{demnach}\ 8h^2+(a-b)^2 \stackrel{=}{<} 2(a+b)^2.$$

Beweis.

Wenn der Winkel ABC grösser, als ein rechter Winkel, oder einem rechten gleich ist, so fällt der Punkt K innerhalb des Kreises, oder auf den Umfang, also erreicht die Linie KF den Umfang. Ist der Winkel ABC kleiner, als ein rechter, so ist, vermöge der Determination, $8h^2+(a-b)^2 \stackrel{=}{<} 2(a+b)^2$, also ist, wie leicht erhellet, $DK \stackrel{=}{<} LM$, mithin erreicht der Kreis die Linie KF. Geschieht es in F,

so ist $BE:EF = BD:DK$

folglich BE = EF

somit $\left.\begin{array}{l}BE\,.\,EF\\AE\,.\,EC\end{array}\right\} = BE^2$

also AE : EB = BE : EC.

Zusatz 1.

Es erhellet von selbst, dass es, wenn ABC > R (Fig. 10. a.), zwey Durchschnittspunkte F, F' auf verschiedenen Seiten der Linie DK, dass es, wenn ABC = R (Fig. 10. b.), zwey Durchschnittspunkte giebt, wovon der eine im Durchschnitt K liegt, der andere, F', der Endpunkt eines Durchmessers ist, dass es, wenn ABC < R (Fig. 10. c.), zwey Durchschnittspunkte F, F' giebt, welche auf einerley Seite von DK liegen.

Zusatz 2.

Der Punkt E fällt auf die Verlängerung von AD, in D, zwischen D, A, je nachdem der Werth von x positiv, = 0, oder negativ wird. Die Werthe von y liegen sämmtlich von A aus auf AC in derselben Richtung.

Zusatz 3.

Die Tangenten, welche mit dem negativen Zeichen versehen sind, bezeichnen Winkel, welche auf der anderen Seite der Linie BD liegen, als wo die Winkel gefunden werden, deren Tangenten das positive Zeichen vor sich haben.

Aufgabe XI. (Fig. 11.)

Zwischen die Katheten eines gegebenen rechtwinkligen Dreieckes ABC eine gerade Linie FG, welche

der gegebenen geraden Linie b gleich sey, und von der Hypotenuse BC in M halbirt werde, zu legen.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey FG die gesuchte Linie, so liegt, weil FAG = R, der Punkt A auf dem Umfange eines über FG beschriebenen Halbkreises, also ist die gerade Linie AM = MG = $\frac{1}{2}$ b, folglich liegt der Punkt M auf dem Umfange eines aus A als Mittelpunkte mit einem Radius = $\frac{1}{2}$ b beschriebenen Kreises, ist mithin, weil er auch auf der Hypotenuse BC liegt, gegeben.

Construction.

Man beschreibe einen Kreis, welcher in A den Mittelpunkt, und eine Linie = $\frac{1}{2}$ b zum Radius habe, und die Hypotenuse BC in M erreiche, beschreibe aus M als Mittelpunkte einen Kreis, welcher die gerade Linie MA zum Halbmesser habe, und die Kathete AC in G erreiche, ziehe die gerade Linie GM, und verlängere dieselbe bis zum Durchschnitte F mit der verlängerten AB, so ist GF die gesuchte Linie.

Determination.

Damit der Kreis, welcher A zum Mittelpunkte hat, die Linie BC erreiche, muss $\frac{1}{2}$ b $\overset{=}{>}$ AL seyn, wenn AL perpendikular auf BC gefällt wird.

Beweis.

Es ist $\frac{1}{2}$ b $\overset{=}{>}$ AL, also erreicht der aus A als Mittelpunkte beschriebene Kreis die Linie BC. Geschieht es in B, so mache man FB = BA, und FA ist die gesuchte Linie, wie sich von selbst ergiebt. Geschieht

es in C, so mache man GC = CA, und es ist GA die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Geschieht es in einem anderen Punkte M, so fälle man auf AC das Perpendikel MK, welches kleiner ist, als MA; mithin schneidet der Kreis, welcher M zum Mittelpunkte hat, die Linie AC in einem Punkte G, und die gerade Linie GM schneidet in ihrer Verlängerung die Linie AB in der Verlängerung, so dass

$$GM : MF = GK : KA$$

$$\text{also } GM = MF$$

$$\text{folglich } FG = 2\,GM$$
$$= b \text{ ist.}$$

Zusatz.

Es erhellet von selbst, dass es, wenn $\frac{1}{2}b = AL$, eine einzige, in allen andern Fällen eine zweite Linie mit der gegebenen Eigenschaft giebt. Uebrigens kann, je nachdem die Linie b beschaffen ist, jeder der Punkte M zwischen B, C, oder der eine in B, der andere zwischen B, C, oder der eine in C, der andere auf der verlängerten CB, oder der eine zwischen B, C, der andere auf der Verlängerung von BC, oder es können beide auf der Verlängerung von BC liegen.

Algebr. Auflösung.

Setzt man $BM = x$, so ist $x : \frac{1}{2}b = \sin.F : \sin.B$
$$= \cos.G : \cos.C$$

$$\text{also } x^2 : \tfrac{1}{4}b^2 = \overline{\cos.G}^2 : \overline{\cos.C}^2.$$

Setzt man $BC = a$, so ist $a - x : \frac{1}{4}b = \sin.G : \sin.C$

$$\text{folglich } (a-x)^2 : \tfrac{1}{4}b^2 = \left\{ \frac{\sin.G}{\overline{1-\cos.G}^2} \right\}^2 : \overline{\sin.C}^2$$

$$\text{mithin } (a-x)^2\,\overline{\sin.C}^2 = \tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{4}b^2\,\overline{\cos.G}^2$$

$$\text{somit } \overline{\cos.G}^2 = \frac{\tfrac{1}{4}b^2 - (a-x)^2\,\overline{\sin.C}^2}{\tfrac{1}{4}b^2}$$

$$\text{demnach } x^2 : \tfrac{1}{4}b^2 = \frac{\tfrac{1}{4}b^2 - (a-x)^2\,\overline{\sin.C}^2}{\tfrac{1}{4}b^2} : \overline{\cos.C}^2$$

$$\text{also } x^2\,\overline{\cos.C}^2 = \tfrac{1}{4}b^2 - (a^2 - 2ax + x^2)\,\overline{\sin.C}^2$$

$$\text{folgl. } \left.\begin{matrix} x^2(\overline{\sin.C}^2 + \overline{\cos.C}^2) \\ x^2 \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} 2ax\,\overline{\sin.C}^2 \\ \\ 2cx\,\sin.C \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{4}b^2 - \left\{\begin{matrix} a^2\,\overline{\sin.C}^2 \\ AB^2 \\ c^2, \end{matrix}\right.$$

wenn $AB = c$ gesetzt wird;

$$\text{mithin } (x - c\sin.C)^2 = \tfrac{1}{4}b^2 - c^2 + c^2\,\overline{\sin.C}^2$$
$$= \tfrac{1}{4}b^2 - \left\{\begin{matrix} c^2(1 - \overline{\sin.C}^2) \\ c^2\,\overline{\cos.C}^2 \\ c^2\,\overline{\sin.B}^2 \\ AL^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } x = \left\{\begin{matrix} c\sin.C \\ c\cos.B \\ BL \end{matrix}\right\} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - AL^2)}$$

Zusatz 1.

Es erhellet aus diesem Ausdruck, dass x zwey Werthe erhält, wovon der eine immer positiv ist, gleichwie die geometrische Construction immer einen Punkt M auf der Linie BC, oder ihrer Verlängerung über C hinaus, nachweiset, dass beide einander gleich

und $= BL$ werden, wenn $\frac{1}{4}b^2 = AL^2$, also $\frac{1}{2}b = AL$ ist, dass der eine, welcher immer positiv ist, $\overset{<}{\underset{>}{=}} BC$ wird, jenachdem

$$BL + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - AL^2)} \overset{<}{\underset{>}{=}} BC \text{ ist,}$$

$$\text{also } \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - AL^2)} \overset{<}{\underset{>}{=}} \left\{\begin{matrix} CB - BL \\ CL \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } \tfrac{1}{4}b^2 - AL^2 \overset{<}{\underset{>}{=}} CL^2$$

$$\text{mithin } \tfrac{1}{4}b^2 \overset{<}{\underset{>}{=}} \left\{\begin{matrix} AL^2 + LC^2 \\ AC^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } \tfrac{1}{2}b \overset{<}{\underset{>}{=}} AC$$

$$\text{demnach } b \overset{<}{\underset{>}{=}} 2\,AC;$$

dass der andere positiv, $= 0$, oder negativ wird, je nachdem

$$BL \overset{>}{\underset{<}{=}} \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - AL^2)}$$

$$\text{also } BL^2 \overset{>}{\underset{>}{=}} \tfrac{1}{4}b^2 - AL^2$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} BL^2 + LA^2 \\ BA^2 \\ c^2 \end{matrix}\right\} \overset{>}{\underset{<}{=}} \tfrac{1}{4}b^2$$

$$\text{mithin } c \gtreqless \tfrac{1}{2}b$$

$$\text{somit } 2c \gtreqless b.$$

Alles in Uebereinstimmung mit der geometrischen Construction, welche den dem immer positiven Werthe von x entsprechenden Punkt M zwischen B und C, in C, in der Verlängerung von BC über C hinaus nachweiset, je nachdem $\frac{1}{2}b \lesseqgtr AC$ ist, und den zweiten Punkt M zwischen B und L, oder in B, oder auf die Verlängerung von LB über B hinaus legt, je nachdem $\frac{1}{2}b \gtreqless AB$ ist.

Zusatz 2.

Soll von einer Linie BL eine andere LM abgezogen werden, so legt die Algebra die abzuziehende Linie von L an auf LB, ohne Rücksicht darauf, ob die abzuziehende die kleinere, oder die grössere sey, und es erscheint der Ueberrest in entgegengesetzter Lage mit demjenigen, welcher das Zeichen + vor sich hat, sobald der Zahlwert für denselben das Zeichen — erhält.

Zusatz 3.

Setzt man LM = v, so findet man $v = \pm \sqrt{(\frac{1}{4}b\text{-}AL^2)}$. Ist $\frac{1}{2}b \geqq AL$, so erhält man einen Werth von v, welcher = 0 ist, oder zwey einander gleiche, durch die Zeichen + — unterschiedene, Werthe, wodurch die auf verschiedenen Seiten des Punktes L liegenden Linien LM bezeichnet werden, und welche, so lange $\frac{1}{2}b > AB$, und $AB > AC$ ist, beide zwischen B, C liegen, und beide die Aufgabe buchstäblich im Sinne der Aussage auflösen.

Zusatz 4.

Setzt man AM = z, so zeigt die geometrische Analysis, dass $z = \frac{1}{2}b$. Die Algebra zeigt also nur einen Werth von z an, wenn gleich derselbe zwey Auflösungen bestimmen kann. Linien, welche wie die beiden Werthe von AM auf verschiedenen Seiten von AL liegen, werden also nicht durch die Zeichen + — unterschieden.

Zusatz 5.

Fällt man vom M ein Perpendikel MQ auf AB, so ist $BM^2 = AM^2 + AB^2 - 2BA.AQ$

$$\text{also } \begin{matrix} AQ \\ y \end{matrix} \Big\} = \frac{AM^2 + AB^2 - BM^2}{2BA}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}b^2 + c^2 - (BL \pm \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - AL^2)})^2}{2c}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}b^2 + c^2 - BL^2 \mp 2BL\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - AL)^2} - \frac{1}{4}b^2 + AL^2}{2c}$$

$$= \frac{2AL^2 \mp 2BL\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - AL^2)}}{2c}$$

$$= \frac{AL^2 \mp BL\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - AL^2)}}{c}$$

Es hat mithin y zwey Werthe, von welchen der eine immer positiv ist, gleichwie die geometrische Construction unter allen Umständen einen Punkt M zwischen B, C, oder auf der Verlängerung von CB über B hinaus, also auch einen durch das von diesem Punkte auf AB, oder deren über B hinausgehende Verlängerung gefällte Perpendikel bestimmten Punkt Q nachwiess. Der andere Werth von y ist positiv, = o, oder

negativ, je nachdem $AL^2 \gtreqless BL\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - AL^2)}$

$$\text{also } \frac{AL^2}{BL} \Big\} \gtreqless \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - AL^2)}$$
$$LC$$

$$\text{folglich } LC^2 \gtreqless \tfrac{1}{4}b^2 - AL^2$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} LC^2 + AL^2 \\ AC^2 \end{matrix}\right\} \gtreqless \tfrac{1}{4}b^2$$

$$\text{somit } AC \gtreqless \tfrac{1}{2}b$$

$$\text{demnach } 2AC \gtreqless b;$$

gleichwie die geometrische Construction für dieselben Fälle einen Punkt M zwischen B, C, oder in C, oder auf der Verlängerung von BC über C hinaus, also auch den Fusspunkt des durch diesen Punkt M auf BA, oder ihre Verlängerung bestimmten Perpendikels nachweiset.

Zusatz 6.

Setzt man $AF = u$, so ist $u = 2y$, weil $AF = 2AQ$, wegen $AM = MF$, mithin ist $u = \frac{2(AL^2 \mp BL\sqrt{\frac{1}{4}b^2 - AL^2})}{c}$.
Es hat also u gleichfalls zwey Werthe, wovon der eine immer positiv ist, der andere mit y positiv, = o, und negativ wird, jenachdem

$$AL^2 \gtreqless EL\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2-AL^2)}$$

$$\text{also } 2AC \gtreqless b.$$

Anmerkung.

Carnot sagt in der Géométrie de Position pag. 357. bey der Auflösung der Aufgabe: »zwischen die Rich»tungen der Katheten eines gegebenen rechtwinkeligen »Dreieckes eine gerade Linie von gegebener Länge zu »legen, welche durch die Hypotenuse halbirt werde", dass man für die Linie BM immer zwey positive Werthe, für die Linie AF immer einen positiven, und einen negativen Werth erhalte. Aus dem Vorstehenden gehet hervor, dass das unrichtig ist, indem $x = BM$ einen positiven und einen negativen Werth erhalten kann, und beide Werthe von u positiv werden können, oder der eine positiv, der andere $= 0$, der eine positiv, der andere negativ werden kann.

Er behauptet ferner, niemals löse ein negativer Werth einer gesuchten Grösse eine Aufgabe in demselben Sinne auf, wie der positive, und die durch den negativen Werth der gesuchten Grösse bestimmte Auflösung könne also niemals als eine zweite Auflösung derselben Aufgabe angesehen werden.

Das Vorstehende zeigt, dass die negativen Werthe der gesuchten Linien geradezu und in demselben Sinne die Aufgabe auflösen, wie die positiven, wenn die Aufgabe nur in der Allgemeinheit aufgefasst wird, in welcher die Algebra sie auffasst, und dass die negativen Werthe die zweiten Auflösungen der vorgelegten

Aufgabe sind. Es giebt unzählige Beispiele, in welchen dieselben eine Aufgabe in allen Beziehungen in demselben Sinne auflösen, wie die positiven, und die bisher behandelten Aufgaben sind eben so viele Beweise für diese Behauptung.

Carnot behauptet ferner, dass nur zufällig in dem vorliegenden Falle der negative Werth von u eine in entgegengesetzter Richtung mit der durch den posit. Werth von u angezeigten Linie liegende Linie anzeige, dass die mit dem negativen Zeichen behafteten Linien bald mit den positiven in entgegengesetzter Richtung, bald unter schiefen Winkeln gegen dieselben geneigt, bald in derselben Richtung mit ihnen lägen, und dass es darüber gar keine feste Regel gebe. Es ist ein Hauptzweck dieser Schrift zu zeigen, dass alle diese Behauptungen falsch sind, dass namentlich durch das negative Zeichen angedeutete Linien niemals anders, als in entgegengesetzter Richtung mit den durch das positive Zeichen angegebenen liegen, dass jede mit dem negativen Zeichen behaftete Linie eine solche Lage anzeige, dass Linien, welche gegen andere unter irgend welchen Winkeln geneigt sind, von denselben nie durch die Zeichen + — unterschieden werden, dass endlich Linien, welche in einerley Richtung liegen, immer und überall dasselbe Zeichen vor sich haben.

Aufgabe XII. (Fig. 12 a. b.)

Auf dem gegebenen Kreisdurchmesser AB von dem gegebenen Punkte C aus eine Linie CQ abzuschneiden, dass, wenn von dem Punkte B an einen über CQ als Durchmesser beschriebenen Kreis eine Tangente BF gezogen, und dieselbe bis zum Durchschnitte G mit

dem Umfange des über AB liegenden Kreises verlängert wird, das Segment FG der Linie AC gleich werde.

In meinen geometrischen Aufgaben, Berlin 1825 und Elberfeld 1828, finden sich folgende Constructionen dieser Aufgabe mit hinzugefügten Beweisen.

Erste Construction. (Fig. 12. a.)

Man halbire den halben Kreisumfang AHB in H, ziehe die gerade Linie AH, beschreibe aus H als Mittelpunkte einen Kreis mit einem Halbmesser = AH, welcher dem in C auf AC aufgerichteten Perpendikel in E begegne, ziehe die gerade Linie HE, welche den Kreis in K schneide, verbinde die Punkte K, A durch die gerade Linie AK, fälle auf dieselbe das, den Durchmesser AB in D schneidende, Perpendikel EL, beschreibe aus D als Mittelpunkte mit einem Radius = DC einen Kreis, und ziehe an denselben die Tangente BF, so leistet dieselbe das Verlangte.

Zusatz.

Nimmt man den zweiten Durchschitt E' des aus H als Mittelpunkte beschriebenen Kreises mit dem Perpendikel CE, zieht die den Kreis in K' schneidende gerade Linie HE', verbindet die Punkte K', A durch die gerade Linie AK', fällt auf die Verlängerung derselben das, den verlängerten Durchmesser in D' schneidende, Perpendikel E'L', beschreibt aus D' als Mittelpunkte einen Kreis mit einem Radius = D'C, und zieht an denselben die Tangente BF', so leistet auch diese das Verlangte, wie von selbst erhellet.

Zweite Construction. (Fig. 12. b.)

Man errichte in C das Perpendikel MC auf AB, mache dasselbe = CA, halbire den Winkel ACM durch

die den Kreis in N schneidende gerade Linie CN, ziehe die, denselben Kreis in G erreichende, gerade Linie NM, errichte in dem Halbirungspunkte O der Linie GM ein Perpendikel auf GM, welches dem Diameter in D begegne, beschreibe aus D als Mittelpunkte einen Kreis mit einem Radius = DC, und ziehe die gerade Linie BG, so hat dieselbe die gegebene Eigenschaft.

Zusatz.

Bezeichnet man den zweiten Durchschnitt der Linie CN und des Kreises mit N′, zieht die den Kreis in G′ erreichende gerade Linie N′M, errichtet in dem Halbirungspunkte O′ der Linie G′M′ ein Perpendikel auf G′M′, welches dem verlängerten Diameter in D′ begegne, beschreibt aus D′ als Mittelpunkte einen Kreis mit einem Radius = D′C, und zieht die gerade Linie BG′, so hat auch diese die gegebene Eigenschaft, wie von selbst erhellet.

Algebr. Auflösung.

Man setze $AC = FG = a$, $BC = b$, $CD = x$, also $DB = b - x$, $BQ = b - 2x$, $AD = a + x$. Nun ist, wenn die Linien AG, DF gezogen werden,

$$DF \# AG$$

$$\text{also } BF : FG = BD : DA$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} BF^2 \\ CB \cdot BQ \end{matrix}\right\} : FG^2 = BD^2 : DA^2$$

$$\text{d. i. } b(b-2x) : a^2 = (b-x)^2 : (a+x)^2$$

$$= b^2 - 2bx + x^2 : a^2 + 2ax + x^2$$

$$\text{mithin } b^2 - 2bx - a^2 : a^2 = b^2 - a^2 - 2(a+b)x : a^2 + 2ax + x^2$$

$$\text{somit } (b^2-a^2)a^2 - 2a^2bx + 2a(b^2-a^2)x - 4abx^2 + (b^2-a^2)x^2 - 2bx^3 = a^2(b^2-a^2) - 2a^2(a+b)x$$

demnach $\left.\begin{matrix}2ab^2x-4abx^2+b^2x^2-a^2x^2-2bx^3\\(2ab^2-4abx+b^2x-a^2x-2bx^2)x\end{matrix}\right\}=0$

also $x=0$, oder $2bx^2+(a^2-b^2+4ab)x-2ab^2=0$

folglich $x^2+\frac{a^2+4ab-b^2}{2b}x=ab$

mith. $x^2+\frac{a^2+4ab-b^2}{2b}\cdot x+\left(\frac{a^2+4ab-b^2}{4b}\right)^2=\left(\frac{a^2+4ab-b^2}{4b}\right)^2+ab$

demnach $x=-\frac{a^2+4ab-b^2}{4b}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2+4ab-b^2}{4b}\right)^2+ab}$

Zusatz 1.

Nach dem, was die geometrische, von der Rechnung unabhängige, Construction oben gezeigt hat, kann es nicht zweifelhaft seyn, dass der positive Werth von x die Linie CD, der negative die Linie CD' bezeichne. Der Werth $x=0$ sagt nichts anderes, als dass ein Kreis, dessen Mittelpunkt in C und Radius $=0$ wäre, die Eigenschaft habe, dass eine, von B an ihn gelegte, Tangente, welche BC selbst wäre, den zwischen dem Berührungspunkte, welcher C wäre, und dem Durchschnittspunkte A derselben mit dem gegebenen Kreise gelegenen Theil der gegebenen AC gleich hätte.

Zusatz 2.

Dasselbe Resultat liefert die Rechnung, wenn man den Werth von BQ sucht. Setzt man

$BQ=y$, so ist $by:a^2=\left(\frac{b+y}{2}\right)^2:\left(a+\frac{b-y}{2}\right)^2$

$=(b+y)^2:(2a+b-y)^2$

also $by:a^2=b^2+2by+y^2:(2a+b)^2-2(2a+b)y+y^2$

folgl. $by - a^2 : a^2 = b^2 - (2a+b)^2 + 2(b+2a+b)y : (2a+b)^2 - 2(2a+b)y + y^2$
$$= 4ab - 4a^2 + 4(a+b)y : (2a+b)^2 - 2(2a+b)y + y^2$$

mithin $4a^3b - 4a^4 + 4a^2(a+b)y = (2a+b)^2by - 2(2a+b)by^2$
$$+ by^3 - (2a+b)^2a^2 + 2(2a+b)a^2y - a^2y^2$$

also $0 = by^3 - (a^2 + 4ab + 2b^2)y^2 + b(2a^2 + 4ab + b^2)y - a^2b^2$
$$= (y-b)(by^2 - (a^2 + 4ab + b^2)y + a^2b)$$

somit $y - b = 0$, oder $by^2 - (a^2 + 4ab + b^2)y + a^2b = 0$

demnach $y = b$, $\quad y^2 - \frac{a^2 + 4ab + b^2}{b}y + a^2 = 0$

folglich $\left(y - \frac{a^2 + 4ab + b^2}{2b}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + 4ab + b^2}{2b}\right)^2 - a^2$

mithin $y = \frac{a^2 + 4ab + b^2}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2 + 4ab + b^2}{2b}\right)^2 - a^2}$

Die letzteren Werthe von y sind beide positiv, und bezeichnen ohne allen Zweifel die Linien BQ, BQ'. Der Werth von $y = b$ weiset auf denselben Kreis hin, wie oben der Werth $x = 0$.

Anmerkung

Klügel, welcher diese Aufgabe in seinem Wörterbuche, Band I. p. 128 sq, behandelt, schliesst den Werth $x = 0$, oder $y = b$ aus, und nennt den negativen Werth von x, und den grösseren der positiven Werthe von y fremde Wurzeln, d. i. solche, welche zur Frage nicht gehören. Aus dem Gesagten erhellet die Unrichtigkeit dieser Behauptung, und die Wichtigkeit der geometrischen Behandlung solcher Aufgaben. Das, was Klügel und mit ihm viele Andere fremde Wurzeln nennen, giebt es in der Algebra nicht. Sie fasst jede in eine Gleichung gebrachte Frage in der Allgemeinheit auf,

dass sie jeden positiven, und jeden negativen Werth der unbekannten Grösse, welcher der Gleichung Genüge leistet, aufsucht, und der negative Werth ist eben so gewiss, und in demselben Sinne, in welchem die Algebra die Aufgabe auffasst, eine Auflösung der Aufgabe, als der positive, und es ist eben so wenig erlaubt, einen negativen auszuschliessen, als einen positiven. Wer geometrische Constructionen, welche von der Rechnung unabhängig sind, macht, und sich die Mühe nehmen will, die geometrischen Bedeutungen der positiven und negativen algebraischen Werthe der gesuchten Grössen in allen Fällen zu erforschen, der wird sich davon überzeugen, dass die Algebra niemals eine nichts sagende, zur Frage nicht gehörende, überflüssige, oder, was eben so viel ist, falsche Antwort auf die ihr vorgelegten Fragen giebt.

Aufgabe XIII. (Fig. 13.)

Ein Quadrat zu beschreiben, in welchem der Ueberschuss der Diagonale über eine Seite der gegebenen geraden Linie d gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey ABCD das geuchte Quadrat, so ist, wenn von der Diagonale AC die Linie AE = AB abgeschnit-

ten, und das, die Linie BC in F schneidende, Perpendikel EF auf AC aufgerichtet wird,

$$ECF = EFC$$

$$\text{also } FE = EC$$
$$= d;$$

$$\text{demnach } FC^2 = 2d^2.$$

Zieht man die gerade Linie AF, so ist

$$\triangle AEF \underset{\backsim}{=} \triangle ABF$$

$$\text{folglich } BF = FE$$
$$= d;$$

mithin ist sowohl BF, als FC, somit BC gegeben.

Construction.

Man beschreibe über BF = d das Quadrat BFGH, ziehe die Diagonale FH, nehme auf der Verlängerung von BF die Linie CF = FH, und beschreibe über BC das Quadrat ABCD, so hat dasselbe die gegebene Eigenschaft.

Beweis.

Fällt man auf die Diagonale AC das Perpendikel FE, so ist

$$\left.\begin{array}{r} FC^2 \\ FH^2 \\ 2FB^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = FE^2 + EC^2 \\ = 2EC^2 \\ \end{array}$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{r} FB \\ d \end{array}\right\} \begin{array}{l} = EC \\ = FE \end{array}$$

$$\text{folglich } AE = AB$$

$$\text{mithin } CA - AB = CA - AE$$
$$= CE$$
$$= d.$$

Zusatz.

Macht man in der Richtung von FB die Linie FC' $= FH$, beschreibt über BC' das Quadrat $A'BC'D'$, zieht die Diagonale $C'A'$, und fällt auf die Verlängerung derselben das Perpendikel FE', so ist

$$\left.\begin{matrix} FC'^2 \\ FH^2 \\ 2FB^2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = FE'^2 + E'C'^2 \\ = 2E'C'^2 \\ \end{matrix}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} FB \\ d \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = E'C' \\ = FE' \end{matrix}$$

$$\text{folglich } E'A' = A'B$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } C'A' + A'B &= C'A' + A'E' \\ &= E'C' \\ &= d. \end{aligned}$$

Demnach erhält man ein Quadrat, in welchem die Summe der Diagonale und einer Seite der gegebenen geraden Linie d gleich ist.

Algebr. Auflösung.

$$\text{Setzt man } BC = x, \text{ so ist } \left.\begin{matrix} (x+d)^2 \\ x^2+2dx+d^2 \end{matrix}\right\} = 2x^2$$

$$\text{also } d^2 = x^2 - 2dx$$

$$\text{folglich } 2d^2 = x^2 - 2dx + d^2$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } x &= d \pm d\sqrt{2} \\ &= d(1 \pm \sqrt{2}); \end{aligned}$$

demnach hat x zwey Werthe,

$$\begin{aligned} \text{den einen } &= d(\sqrt{2}+1) \\ \text{den anderen } &= -d(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

Zusatz 1.

Die Natur der Sache erfodert, und aus der geo-

metrischen Construction erhellet, dass die durch die verschiedenen Werthe von x bezeichneten Linien nichts anderes sind, als die Linien BC, BC', wovon die durch den negativen Ausdruck bezeichnete Linie BC' in gerade entgegengesetzter Richtung mit der durch den positiven Ausdruck bezeichneten BC liegt.

Zusatz 2.

Die doppelten Werthe von x wurden lediglich bedingt durch den doppelten Werth der Diagonale des Quadrates, welches $= 2d^2$. Da nämlich das Quadrat der Diagonale des Quadrates der Linie $\mp d = 2(-d)^2$
$= 2d^2$ ist,
so giebt die Algebra den Werth der beiden, einander entgegengesetzt liegenden, Diagonalen FH, FH' der Quadrate der Linien FB, FB', deren jede $= d$, und wovon sie die eine durch $+d$, die andere durch $-d$ bezeichnet, durch die Ausdrücke $FH = +d.\sqrt{2}$, $FH' = -d\sqrt{2}$.

Zusatz 3.

Aus dem Gesagten erhellet wieder die Wichtigkeit der Beachtung des negativen Zeichens. Deutet dasselbe auch nicht immer auf eine zweite Auflösung einer Aufgabe hin in dem beschränkten Sinne, in welchem sie anfänglich aufgefasst war, so enthält sie doch die Auflösung in einem so wenig von dem anfänglich aufgefassten abweichenden Sinne, dass beide Auflösungen in den allgemeinen Darstellungen der Algebra für zwey Antworten auf eine Frage angesehen werden. Zugleich aber erhellet daraus, dass die Geometrie, richtig verstanden, dieselbe Allgemeinheit herbeiführt, wie die Algebra. Durfte man doch in der Construction nur sagen: man beschreibe aus F als Mittelpunkte einen Kreis mit

einm Radius = FH, welcher die verlängerte FB in C, C' schneide u. s. w., um dieselbe Allgemeinheit zu erhalten, in welcher die Algebra die Aufgabe auflöset.

Aufgabe XIV. (Fig. 14).

Ein rechtwinkliges △ ABC zu beschreiben, in welchem die Summe der Katheten der gegebenen geraden Linie a, die Summe der Hypotenuse und der Höhe der gegebenen geraden Linie b gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey △BAC das verlangte, so ist, wenn die Höhe durch AD bezeichnet wird,

$$BC\ AD = BA . AC$$

also $$\underbrace{BC^2 + 2BC.AD + AD^2}_{\substack{(BC+AD)^2 \\ b^2}} = \underbrace{BA^2 + 2BA.AC + AC^2}_{\substack{(BA+AC)^2 \\ a^2}} + AD^2$$

folglich $b^2 - a^2 = AD^2$;

mithin ist AD, somit BC und das ganze Dreieck gegeben.

Construction.

Man beschreibe über der geraden Linie CG = b einen Halbkreis, lege in denselben die Sehne CE = a, ziehe die gerade Linie GE, schneide auf der Linie GC die Linie GB = GE ab, errichte in G auf GC das Perpendikel FG = GE, ziehe die Linie FA ⧣ GC, und beschreibe über BC einen Halbkreis, welcher der Linie FA in A begegne, so ist, wenn die geraden Linien BA, AC gezogen werden, △ ABC das verlangte.

Determination.

Damit die Auflösung möglich werde, muss nicht nur in den über CG beschriebenen Halbkreis die Sehne CE = a gelegt werden können, d. h. $a < b$ seyn, sondern auch die Linie FA den über BC beschriebenen Halbkreis erreichen,

$$\text{d. h. } \left.\begin{matrix} FG \\ GE \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2} BC \text{ seyn} \\ \frac{CG-GE}{2} \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } 2\,GE \overset{=}{<} CG - GE$$

$$\text{folglich } 3\,GE \overset{=}{<} CG$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} 9\,GE^2 \\ 9(b^2 - a^2) \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix} CG^2 \\ b^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } 8\,b^2 \overset{=}{<} 9\,a^2$$

$$\text{demnach } \tfrac{8}{9}\,b^2 \overset{=}{<} a^2.$$

Beweis.

Es ist $a < b$, also lässt sich in den über CG beschriebenen Kreis eine Sehne CE = a legen. Auch

$$\text{ist } a^2 \overset{=}{<} \tfrac{8}{9}\,b^2$$

$$\text{also } 9\,a^2 \overset{=}{>} 8\,b^2$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} b^2 \\ CG^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix} 9(b^2 - a^2) \\ 9\,GE^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } CG \overset{=}{>} 3GE$$

$$\text{somit } CG - GE \overset{=}{>} 2GE$$

$$\text{demnach } \left.\begin{matrix}\frac{CG-GE}{2}\\ \frac{CB}{2}\end{matrix}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix}GE\\ FG;\end{matrix}\right.$$

also berührt, oder schneidet der über BC beschriebene Halbkreis die Linie FA. Geschieht es in A, so ist

$$\left.\begin{matrix}(BC+AD)^2\\ (BC+FG)^2\\ (CB+BG)^2\\ b^2\end{matrix}\right\} = (BA+AC)^2 + \left\{\begin{matrix}AD^2\\ GF^2\\ GE^2\\ b^2-a^2\end{matrix}\right.$$

$$\text{also } (BA+AC)^2 = a^2$$

$$\text{folglich } BA+AC \doteq a.$$

Da auch $BAC = R$, so hat $\triangle ABC$ die gegebenen Eigenschaften.

Zusatz 1.

Es erhellet von selbst, dass es im Fall der Berührung der Linie FA und des über BC beschriebenen Kreises ein einziges, im Fall des Schneidens ein zweites Dreieck A′BC mit den gegebenen Eigenschaften giebt.

Zusatz 1.

Schneidet man auch auf den Verlängerungen von CG und FG Linien B″G, F″G = GE ab, legt F″A ⫲ CG, und beschreibt über CB″ einen Halbkreis, welcher der Linie A″F″ in A″ begegne, so ist, wenn A″B″, A″C gezogen werden, und das Perpendikel A″D″ auf B″C gefällt wird,

$$B''C \,.\, A''D'' = B''A'' \,.\, A''C$$

also

$$\left.\begin{array}{c} B''C^2 - 2B''C.A''D'' + A''D''^2 \\ (B''C - A''D'')^2 \\ CG^2 \\ b^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} B''A''^2 - 2B''A''.A''C + A''C^2 \\ (A''C - A''B)^2 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} A''D''^2 \\ GE^2 \\ b^2 - a^2 \end{array}\right.$$

$$\text{also } (A''C - A''B)^2 = a^2$$

$$\text{folglich } A''C - A''B = a.$$

Da auch $B''A''C = R$, so ist zugleich ein rechtwinkliges Dreieck gefunden worden, in welchem der Ueberschuss der Hypotenuse über die Höhe der Linie b, und der Ueberschuss der einen Kathete über die andere der Linie a gleich ist, wenn es zum Zusammentreffen der Linie $A''F''$ und des über $B''C$ beschriebenen Kreises kommt. Das geschieht immer, wenn nur

$$F''G \overset{=}{<} \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} B''C \\ \frac{CG+GE}{2} \end{array}\right.$$

$$\text{also } 2F''G \overset{=}{<} CG+GE$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{c} F''G \\ GE \end{array}\right\} \overset{=}{<} CG$$

$$\text{somit } b < a \text{ ist.}$$

Auch giebt es, wie von selbst erhellet, im Fall der Berührung ein einziges, im Fall des Durchschnittes ein zweites Dreieck $A''B''C$ mit jenen Eigenschaften.

Algebraische Behandlung.

Setzt man zur algebraischen Darstellung $AD = x$, so ist, wie aus der Analysis erhellet,

$$x^2 = b^2 - a^2$$

$$\text{mithin } x = \pm \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Zusatz 1.

Offenbar weisen die Zeichen + — auf die, der Lage nach entgegengesetzten, gleichen Linien FG, F″G hin, gleichwie man eine der Linie GE gleiche, der Lage nach entgegengesetzte, Linie erhalten haben würde, wenn man CG um eine Linie C′G = b verlängert, über CG einen, auf der anderen Seite von CC′, als diejenige ist, auf welcher der über CG beschriebene Halbkreis liegt, liegenden, Halbkreis beschrieben, und in denselben die Sehne C′E′ = a gelegt hätte, übereinstimmend mit dem bekannten Satze, dass $(-b)^2 - (-a)^2 = (+b)^2 - (+a)^2$.

Zusatz 2.

Bestätigt wird dieses dadurch, dass man, wenn eine Kathete gesucht wird, einen Werth derselben erhält. Setzt man nämlich

$$AB = y$$

$$\text{also } AC = a - y$$

$$\text{so ist } BC = \pm \sqrt{(2y^2 - 2ay + a^2)}$$

$$\text{somit } AD = b \mp \sqrt{(2y^2 - 2ay + a^2)}.$$

Es ist aber $CA : AB = AD : DB$

$$\text{d. i. } a - y : y = b \mp \sqrt{(2y^2 - 2ay + a^2)} : DB$$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} AB : BC \\ y : \pm\sqrt{(2y^2 - 2ay + a^2)} \end{matrix}\right\} = DB : \left\{\begin{matrix} BA \\ y \end{matrix}\right.$$

$$\text{also ist } a - y : \pm \sqrt{(2y^2 - 2ay + a^2)} = b \mp \sqrt{(2y^2 - 2ay + a^2)} : y$$

$$\text{folglich } ay - y^2 = \pm b\sqrt{(2y^2 - 2ay + a^2)} - (2y^2 - 2ay + a^2)$$

mithin $\underline{-ay+y^2+a^2 = \pm b\sqrt{(2y^2-2ay+a^2)}}$

demnach $\left.\begin{matrix}(y^2-ay+a^2)^2\\ y^4-2ay^3+a^2y^2+2a^2y^2-2a^3y+a^4\end{matrix}\right\} = 2b^2y^2-2ab^2y+a^2b^2$

somit $\left.\begin{matrix}y^4-2ay^3+(3a^2-2b^2)y^2-(2a^3-2ab^2)y-a^2b^2\\ (y^2-ay+b\sqrt{(b^2-a^2)}-(b^2-a^2))(y^2-ay-b\sqrt{(b^2-a^2)}-(b^2-a^2))\end{matrix}\right\} = 0.$

Es ist mithin entweder $y^2-ay+b\sqrt{(b^2-a^2)}-(b^2-a^2) = 0$

somit $y^2-ay+\frac{1}{4}a^2 = b^2-a^2-b\sqrt{(b^2-a^2)}+\frac{1}{4}a^2$

folglich $y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(b^2-\frac{3}{4}a^2-b\sqrt{(b^2-a^2)})}$

oder $y^2-ay-b\sqrt{(b^2-a^2)}-(b^2-a^2) = 0$

somit $y^2-ay+\frac{1}{4}a^2 = b^2-a^2+b\sqrt{(b^2-a^2)}+\frac{1}{4}a^2$

folglich $y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(b^2-\frac{3}{4}a^2+b\sqrt{(b^2-a^2)})}$

welche Werthe nichts anderes bezeichnen können, als die Linien BA, BA', B''A'', B''A'''.

Zusatz 3.

Hätte man, da $AD^2 = b^2-a^2$, wie aus Obigem erhellet, $BC = b-\sqrt{(b^2-a^2)}$ gesetzt

also $\left.\begin{matrix}CB.AD\\ BA.AC\\ y.(a-y)\end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix}= \sqrt{(b^2-a^2)}(b-\sqrt{(b^2-a^2)})\\ = b\sqrt{(b^2-a^2)}-b^2+a^2\end{matrix}$

folglich $y^2-ay = b^2-a^2-b\sqrt{(b^2-a^2)}$,

so wäre die Gleichung eine quadratische geworden, statt dass auf dem oben angegebenen Wege eine biquadratische erhalten wurde. Und das mag zum Beweise für die Wichtigkeit und Nothwendigkeit, das negative Zeichen vor dem Wurzelzeichen niemals zu vernachlässigen, dienen. Wer könnte die Algebra vor dem

schwersten Vorwürfen zu schützen, wenn sie zur Bestimmung einer und derselben unbekannten Grösse einer vorgelegten Aufgabe bald zu einer Gleichung des zweiten, bald des vierten Grades führte?

Aufgabe XV. (Fig. 15.)

In ein gegebenes Quadrat ABCD ein gleichseitiges Dreieck BEF zu legen, dessen Grundlinie EF mit ihren Endpunkten E, F auf den Seiten AD, DC, und dessen Spitze in B liege.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey $\triangle$ BEF das verlangte, so ist, wenn der Halbirungspunkt G der Linie BE mit F durch die gerade Linie FG verbunden wird, BGF = R. Da auch BCF = R, so lauft ein über BF als Durchmessern beschriebener Kreis durch die Punkte G, C, also ist BGC = BFC. Da EB = BF, AB = BC,

$$\text{so ist } \triangle AEB \cong \triangle FBC$$

$$\text{folglich } ABE = FBC$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} ABE + FBC \\ R - EBF \\ R - \tfrac{2}{3}R \\ \tfrac{1}{3}R \end{matrix}\right\} = 2FBC$$

$$\text{somit } FBC = \tfrac{1}{6}R$$

$$\text{demnach } \left.\begin{matrix} BFC \\ BGC \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \tfrac{5}{6}R \\ CBG \end{matrix}\right.$$

also GC = CB
= CD.

Zieht man GL ⋕ CB, so ist sowohl GLC = R;
als auch BG : GE = CL : LD

folglich CL = LD

mithin DG = GC;

demnach ist DGC ein gleichseitiges Dreieck. Also ist der Punkt G, die gerade Linie BG, und das Dreieck BEF gegeben.

Construction.

Man beschreibe über DC ein gleichseitiges Dreieck DGC, ziehe durch B, G die, die Seite AD in E schneidende, gerade Linie BE, mache FB = BE, und ziehe die gerade Linie EF, so ist BFE das verlangte Dreieck.

Beweis.

Zieht man den Halbirungspunkt L der Linie CD mit der Spitze G durch die gerade Linie LG zusammen, so ist GLC = R

also GL ⋕ DE

folglich DL : LC = EG : GB

mithin EG = GB.

Ferner ist DCG = $\frac{2}{3}$R

somit GCB = $\frac{1}{3}$R

demnach CGB = $\frac{5}{6}$R = CBG

also ABE, FBC = $\frac{1}{6}$R

folglich BFC = $\frac{5}{6}$R
= BGC;

mithin liegen B, G, F, C auf dem Umfange eines Kreises, demnach ist BGF = R, also BF = FE, mithin das Dreieck BEF gleichseitig.

Zusatz 1.

Beschreibt man auch ein gleichseitiges Dreieck DG′C auf der anderen Seite von DC, zieht die, der verlängerten AD in E′ begegnende, gerade Linie BG′; macht BF′ = BE′, und zieht F′E′; so ist auch BF′E′ ein gleichseitiges Dreieck. Zieht man nämlich die gerade Linie LG′, so ist G′LC = R

also G′L ⋕ DE′

folglich DL : LC = E′G′ : G′B

mithin E′G′ = G′B.

Ferner ist DCG′ = $\frac{2}{3}$R

somit BCG′ = 1$\frac{2}{3}$R

demnach CG′B = $\frac{1}{6}$R = CBG′

also ABE′, F′BC } = $\frac{5}{6}$R

folglich BF′C = $\frac{1}{6}$R

= BG′C;

mithin liegen die Punkte B, F′, G′, C auf einem Kreisumfange, demnach ist BG′F′ = R, also ist das Dreieck BF′E′ gleichseitig.

Zusatz 2.

Da CBG′ = $\frac{1}{6}$R = CBF, so liegen die Punkte B, F, G′ in einer geraden Linie, wie auch die Punkte B, G, F′. Auch wird EF ⋕ E′F′.

Algebraische Auflösung.

1. Bezeichnet man die Linie CF mit x, die Seite des Quadrates mit a, so ist $x^2+a^2=BF^2$

$$=FE^2$$
$$=2DF^2$$
$$=2(a-x)^2$$
$$=2a^2-4ax+2x^2$$

also $-a^2 = x^2-4ax$

folglich $3a^2 = x^2-4ax+4a^2$

mithin $\pm a\sqrt{3} = x-2a$

somit $\left.\begin{matrix}2a \pm a\sqrt{3} \\ a(2 \pm \sqrt{3})\end{matrix}\right\} = x.$

Zusatz.

Beide Werthe von x sind positiv, und bezeichnen ohne Zweifel nichts anderes, als die Linien CF, CF'. Ein Beweis, dass von den positiven Werthen keiner für eine fremde Wurzel anzusehen ist.

2. Setzt man $DF = y$, so ist

$$2y^2 = FE^2$$
$$= FB^2$$
$$= a^2+(a-y)^2$$
$$= 2a^2-2ay+y^2$$

also $y^2+2ay = 2a^2$

folglich $y^2+2ay+a^2 = 3a^2$

mithin $y = -a \pm a\sqrt{3}$
$= a(-1 \pm \sqrt{3}).$

Zusatz.

Der positive Werth von y bezeichnet offenbar nichts anderes, als die Linie DF, während der negative die Linie DF′ bezeichnet. Ein Beweis, dass durch den Gegensatz der Lage die Geometrie dasjenige bezeichnet, was die Algebra durch den Gegensatz der Zeichen unterscheidet, und dass eine negative Wurzel nicht als eine fremde zu betrachten ist.

3. Setzt man BF $= z$, so ist $z^2 = a^2 + \begin{cases} CF^2 \\ (a - DF)^2 \\ (a \mp z\sqrt{\tfrac{1}{2}})^2 \\ a^2 \mp 2az\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}z^2 \end{cases}$

$$\text{also } z^2 = 4a^2 \mp 4az\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\text{folglich } z^2 \pm 4az\sqrt{\tfrac{1}{2}} + 2a^2 = 4a^2 + 2a^2$$
$$= 6a^2$$

$$\text{mithin } z = \mp 2a\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm a\sqrt{6} = a(\mp\sqrt{2} \pm \sqrt{6}).$$

Es hat mithin z folgende vier Werthe. Es ist

$$z = a(-\sqrt{2} + \sqrt{6}) = -a(+\sqrt{2} - \sqrt{6}) = +a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$
$$z = a(-\sqrt{2} - \sqrt{6}) = -a(\sqrt{2} + \sqrt{6}) = -a(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$
$$z = a(+\sqrt{2} + \sqrt{6}) = +a(+\sqrt{2} + \sqrt{6}) = +a(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$
$$z = a(+\sqrt{2} - \sqrt{6}) = +a(\sqrt{2} - \sqrt{6}) = -a(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Zusatz 1.

Hätte man in der Gleichung $z^2 = a^2 + (a - DF)^2$ statt DF nur $+z\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, also $z^2 = a^2 + (a - z\sqrt{\tfrac{1}{2}})^2$ gesetzt, so hätte man erhalten $z^2 = a^2 + a^2 - 2az\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}z^2$

$$\text{also } z^2 = 4a^2 - 4az\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$= 4a^2 - 2az\sqrt{2}$$

$$\text{folglich } z^2 + 2az\sqrt{2} = 4a^2$$

$$\text{mithin } (z+a\sqrt{2})^2 = 6a^2$$

$$\text{somit } z = -a\sqrt{2} \pm a\sqrt{6}$$
$$= a(-\sqrt{2} \pm \sqrt{6})$$

$$\text{demnach } z = +a(\sqrt{6}-\sqrt{2}$$
$$\text{oder } z = -a(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

Zusatz 2.

Die Werthe von z hätten aus den Werthen von x in folgender Weise gefunden werden können. Es

$$\text{ist } z^2 = a^2 + \begin{cases} x^2 \\ a^2(2 \pm \sqrt{3})^2 \\ a^2(4 \pm 4\sqrt{3}+3) \end{cases}$$
$$= a^2(8 \pm 4\sqrt{3})$$

$$\text{also } z = \pm a\sqrt{(8 \pm 4\sqrt{3})}.$$
$$= \pm a(\sqrt{6} \pm \sqrt{2}).$$

Zusatz 3.

Den beiden oben angegebenen Werthen von x corrospondiren also dieselben vier gefundenen Werthe von z, welche oben einzeln bezeichnet sind, und je zwey und zwey einander gleich, aber mit entgegengesetzten Zeichen versehen sind. Die positiven sind ohne Zweifel die Werthe der oben construirten Linien BF, BF', die negativen die Linien BF'', BF''', welche in dem Quadrate A'BC'D' die gleichseitigen Dreiecke BF''E'', BF'''E''' bestimmen. Namentlich ist

$$BF = +a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$
$$BF' = +a(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$
$$BF'' = -a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$
$$BF''' = -a(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

Die in der Voraussetzung, dass DF nur $= z\sqrt{\frac{1}{2}}$ sey, gefundenen Werthe von $z = +a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ und $= -a(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ leiten nur zur Kenntniss der Linien BF und BF''', erschöpfen mithin die Aufgabe

nicht. Und es leuchtet daraus die Wichtigkeit des Satzes hervor, dass $DF = \pm z\sqrt{\frac{1}{2}}$ zu setzen ist.

Zusatz 4.

Beschreibt man über den gleichen Linien BA, AC, wovon die eine durch $+a$, die andere durch $-a$ bezeichnet werde, auf entgegengesetzten Seiten die Quadrate ABFG, ADEC, so ist

$$ABFG = (+a)^2, \quad ADEC = (-a)^2$$
$$= +a^2 \qquad\qquad = +a^2.$$

Zieht man in dem einen Quadrate die Diagonalen AF, BG, welche sich in O schneiden, in dem anderen die Diagonalen AE, DC, sich schneidend in Q, so ist $AO^2 = \frac{1}{2}(+a)^2$, $AQ^2 = \frac{1}{2}(-a)^2 = 1/2(+a)^2$ mithin ist $\frac{1}{2}(+a)^2$ sowohl dem Quadrate von AO, als dem von AQ gleich, und sowohl AO, als $AQ = a\sqrt{\frac{1}{2}}$. Dass beide einander entgegengesetzt sind, drückt die Algebra durch die Zeichen $+ -$ aus.

Aufgabe XVI. (Fig. 16.)

Ein rechtwinkliges Dreieck BAC zu beschreiben, in welchem die Kathete AB der gegebenen geraden Linie a, und dasjenige Segment CD der Hypotenuse, welches durch das von der Spitze des rechten Winkels A auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel AD gebildet wird, der gegebenen geraden Linie b gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, so ist

$$CB.BD = BA^2$$
$$= a^2.$$

Da $CD = b$ werden soll, so ist der Punkt B und das ganze Dreieck gegeben.

Construction.

Man mache $CD = b$, halbire CD in O, errichte in D auf CD das Perpendikel DL, nehme $DL = a$, ziehe die gerade Linie OL, beschreibe aus O als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $= OL$, welcher der verlängerten CD in B begegne, beschreibe über CD als Durchmessern einen Kreis, lege an denselben die Tangente BE, und beschreibe aus B als Mittelpunkt einen Kreis, welcher dem Perpendikel DL in A begegne, und ziehe die gerade Linie CA, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis.

Es ist $CB \cdot BD = BE^2$
$= BA^2$

also $CB : BA = AB : BD$

folglich $CAB = BDA$
$= R.$

Ferner ist $CB \cdot BD + DO^2 = OB^2$ (El. II. 6.)
$= OL^2$
$= LD^2 + DO^2$

mithin $\left.\begin{matrix} CB \cdot BD \\ BA^2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = LD^2 \\ = a^2 \end{matrix}$

somit $BA = a.$

Da auch $CD = b$, so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Zusatz.

Zieht man auch von dem zweiten Durchschnitte B' des Kreises, welcher OL zum Radius hat, mit der

verlängerten DC eine Tangente B'E' an den über DC beschriebenen Kreis, beschreibt aus B' als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = B'E', welcher dem in C auf CD aufgerichteten Perpendikel in A' begegnet, so ist, wie leicht erhellet, auch B'A'D ein Dreieck mit den gegebenen Eigenschaften.

Algebraische Darstellung.

Setzt man DB = x, so ist $\left.\begin{matrix} x(x+b) \\ x^2+bx \end{matrix}\right\} = a^2$

$$\text{also } x^2+bx+\tfrac{1}{4}b^2 = a^2+\tfrac{1}{4}b^2$$

$$\text{folglich } x = -\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2)}.$$

Zusatz.

Es hat x einen positiven und einen negativen Werth, wovon jener die Linie DB, dieser die Linie DB' bezeichnet, wie aus der geometrischen Construction hervorgehet, und es bestimmt der Punkt B' ein Dreieck mit den gegebenen Eigenschaften, wie der Punkt B. Zum Beweise, dass man nicht, wie behauptet wird, durch die geometrische Betrachtung der Figur entscheide, welcher von beiden Werthen der gesuchten Grösse eine richtige Auflösung gebe, sondern dass in allen Fällen beide Werthe in dem Sinne, wie die Algebra die Aufgabe auffasst, eine richtige Antwort auf die ihr vorgelegte Frage geben. Wohin sollte es führen, wenn die Algebra wirklich zuweilen unrichtige Antworten gebe, und man noch anderer Hülfsmittel bedürfte, um unter den gegebenen Antworten die richtige, oder die richtigen aufzusuchen?

Aufgabe XVII. (Fig. 17.)

Ein Dreieck zu beschreiben, dessen Grundlinie der gegebenen geraden Linie g, Winkel der Spitze dem gegebenen Winkel α, Schenkel-Unterschied der gegebenen geraden Linie d gleich sey.

Construction.

Man nehme den Winkel BDC = $R+\frac{1}{2}\alpha$, die Linie BD = d, beschreibe aus B als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = g, welcher die Linie DC in C schneide, und mache den Winkel DCA = ADC, so ist ABC das gesuchte Dreieck, wie von selbst erhellet.

Zusatz.

Bezeichnet man den zweiten Durchschnitt C′ des Kreises und der Linie DC mit C′, macht DC′A′ = A′DC′, und zieht BC′, so ist A′BC′ gleichfalls ein Dreieck mit den gegebenen Eigenschaften, wie von selbst sich ergiebt.

Algebraische Darstellung.

Bezeichnet man den Unterschied der Winkel ACB, ABC mit φ, so ist ACB $= R - \frac{\alpha-\varphi}{2}$, ABC $= R - \frac{\alpha+\varphi}{2}$, demnach ist $g : \left\{\begin{matrix} AC \\ x \end{matrix}\right\} = \sin.\alpha : \cos.\frac{\alpha+\varphi}{2}$, $g : \left\{\begin{matrix} AB \\ x+d \end{matrix}\right\} = \sin.\alpha : \cos.\frac{\alpha-\varphi}{2}$

$$\text{also } x = \frac{g.\cos.\frac{\alpha+\varphi}{2}}{\sin.\alpha},\ x+d = \frac{g.\cos.\frac{\alpha-\varphi}{2}}{\sin.\alpha}$$

$$\text{folglich } d = g\,\frac{\cos.\frac{\alpha-\varphi}{2} - \cos.\frac{\alpha+\varphi}{2}}{\sin.\alpha}$$

$$= \frac{2g \sin.\tfrac{1}{2}\alpha . \sin.\tfrac{1}{2}\varphi}{\sin.\alpha}$$

$$= \frac{g \sin.\tfrac{1}{2}\varphi}{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{mithin } \sin.\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{d . \cos.\tfrac{1}{2}\alpha}{g}$$

$$\text{somit } \left.\begin{array}{r} 1-\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\varphi}^2 \\ \overline{\cos.\tfrac{1}{2}\varphi}^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 1 - \dfrac{d^2 \overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2}{g^2} \\ = \dfrac{g^2 - d^2 . \overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2}{g^2} \end{array}$$

$$\text{demnach } \cos.\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\pm \sqrt{(g^2 - d^2 \overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}.}{g}$$

$$\text{Nun ist } \cos.\frac{\alpha+\varphi}{2} = \cos\tfrac{1}{2}\alpha.\cos.\tfrac{1}{2}\varphi - \sin.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\text{also } \cos.\frac{\alpha+\varphi}{2} = \pm \cos.\tfrac{1}{2}\alpha \frac{\sqrt{(g^2 - d^2 \overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{g} - \frac{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha . d . \cos.\tfrac{1}{2}\alpha}{g}$$

$$\text{folgl. } \left.\begin{array}{r} g.\dfrac{\cos\frac{\alpha+\varphi}{2}}{\sin.\alpha} \\ x \end{array}\right\} \begin{array}{l} = \pm \dfrac{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin.\alpha} \sqrt{(g^2 - d^2 \cos.\tfrac{1}{2}\alpha^2)} - \dfrac{d \sin.\tfrac{1}{2}\alpha \cos.\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin.\alpha} \\ = \pm \dfrac{\sqrt{(g^2 - d^2 \overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2 \sin.\tfrac{1}{2}\alpha} - \tfrac{1}{2}d \end{array}$$

$$\text{mithin } x+d = \pm \frac{\sqrt{(g^2 - d^2 \overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2 \sin.\tfrac{1}{2}\alpha} + \tfrac{1}{2}d.$$

$$\text{Es ist also } x \text{ entweder } = + \left(\frac{\sqrt{(g^2 - d^2 \overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2 \sin.\tfrac{1}{2}\alpha} - \tfrac{1}{2}d \right)$$

$$\text{oder } = - \left(\frac{\sqrt{(g^2 - d^2 \overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2 \sin.\tfrac{1}{2}\alpha} + \tfrac{1}{2}d. \right)$$

und x+d entweder $= + \left(\frac{\sqrt{(g^2 - d^2 \cos.\overline{\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2 \sin.\tfrac{1}{2}\alpha} + \tfrac{1}{2}d \right)$

oder $= - \left(\frac{\sqrt{(g^2 - d^2 \cos.\overline{\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2 \sin.\tfrac{1}{2}\alpha} - \tfrac{1}{2}d \right)$.

Zusatz.

Der erste Werth von x ist dem zweiten von x+d, der zweite von x dem ersten von x+d, mit entgegengesetzten Zeichen, gleich. Die Geometrie construirt die beiden Dreiecke ABC, A'BC', welche congruent sind, namentlich die Seiten BA', AC und A'C', AB gleich haben. Ueberdiess ist A'C' ⧣ AC. Bezeichnet also der erste Werth von x, welcher $= + \left(\frac{\sqrt{(g^2 - d^2 \cos.\overline{\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2 \sin.\tfrac{1}{2}\alpha} - \tfrac{1}{2}d \right)$ ist, die Linie AC, der erste Werth von x+d, welcher $= + \left(\frac{\sqrt{(g^2 - d^2 \cos.\overline{\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2 \sin.\tfrac{1}{2}\alpha} + \tfrac{1}{2}d \right)$ ist, die Linie BA, so bezeichnet der zweite Werth von x, welcher $= - \left(\frac{\sqrt{(g^2 - d^2 \cos.\overline{\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2 \sin.1/2\,\alpha} + 1/2\,d \right)$ ist, die Linie A'C', der zweite Werth von x+d, welcher $= - \left(\frac{\sqrt{(g^2 - d^2 \cos.\overline{1/2\,\alpha}^2)}}{2 \sin.1/2\,\alpha} - 1/2\,d \right)$ ist, die Linie BA'. Die Algebra unterscheidet mithin nicht blos die, von einem Punkte aus in entgegengesetzten Richtungen laufenden, Linien, wie BA, BA', durch die Zeichen + —, sondern auch Linien, wie AC, A'C', welche von verschiedenen Punkten einer geraden Linie zu verschiedenen Seiten derselben einander parallel gezogen werden.

Aufgabe XVIII. (Fig. 18.)

Das gegebene Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, welches einen Winkel = ACB habe, und worin die diesem Winkel gegenüberliegende Seite auf BC perpendikular liege.

Geometrische Behandlung.

Construction.

Man fälle auf BC das Perpendikel AD herab, beschreibe über BC einen Halbkreis, verlängere, wenn es nöthig ist, die Linie AD bis zum Durchschnitte mit demselben in E, ziehe die gerade Linie CE, und beschreibe aus C als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = CE, welcher der BC in F begegne, errichte in F auf BC ein Perpendikel FG, und verlängere CA bis zum Durchschnitte mit demselben in G, so ist GFC das gesuchte Dreieck.

Beweis.

Es ist $\triangle ADC : \triangle ABC = DC : CB = DC^2 : \begin{cases} DC.CB \\ CE^2 \\ CF^2 \end{cases}$

$= \triangle ADC : \triangle FGC$

also $\triangle ABC = \triangle FGC$.

Zusatz.

Bestimmt man den zweiten Durchschnitt F′ des Kreises mit der Linie BC, und errichtet in F′ das Perpendikel F′G′ bis zum Durchschnitte G′ mit der verlängerten AC, so ist auch $\triangle CF'G'$ ein Dreieck mit derselben Eigenschaft, wie leicht erhellet.

Algebr. Auflösung.

Setzt man FC = x, CG = y, so ist xy = BC.CA

$= a.b$, wenn $BC = a$, $CA = b$ gesetzt wird.

$$\text{Es ist aber } \left.\begin{matrix} x:y \\ x^2:xy \end{matrix}\right\} = DC:\left\{\begin{matrix} CA \\ b \end{matrix}\right.$$

$$= a.DC:ab$$

$$\text{also } x^2 = a.DC$$

$$\text{folglich } x = \pm\sqrt{(a.DC)}.$$

Zusatz. 1.

Die Linien F'C, CF stellen sich algebraisch unter den Zeichen + — dar.

Zusatz 2.

Es ist $y = \frac{bx}{DC}$, also gehört dem negativen Werthe von x ein negativer Werth von y zu, gleichwie die Geometrie die Linie G'C der Linie GC entgegengesetzt legt.

Zusatz 3.

Weil die Algebra das Dreieck F'CG' in demselben Sinne, wie das Dreieck FCG, dem Dreiecke ABC gleich nachweiset, so unterscheidet sie zwey Dreiecke, welche, wie die Dreiecke FCG, F'CG', um Verticalwinkel liegen, nicht durch die Zeichen + —, und nennt nicht das eine das entgegengesetzte des anderen.

Zusatz 4.

$$\text{Da der Inhalt des Dreieckes } \left.\begin{matrix} F'CG' \\ \frac{CF'.F'G'}{2} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \triangle CFG \\ \frac{CF.FG}{2} \end{matrix}\right.$$

ist, so muss, weil F'C in Beziehung auf FC negativ ist, F'G' negativ seyn, in Beziehung auf FG. Die Algebra unterscheidet also Linien, welche, wie FG, F'G', auf verschiedenen Seiten einer geraden Linie BF', und, von ver-

schiedenen Punkten F, F' aus, einander parallel liegen, durch die Zeichen + —.

Zusatz 5.

Da endlich $\triangle F'CG' = F'C.CG'.\sin.F'CG'$, so ist, weil $\triangle F'CG'$ positiv ist, F'C, CG' aber negativ sind, sin.F'CG positiv. Die Algebra unterscheidet also die Sinus zweyer Vertikalwinkel nicht durch die Zeichen + —.

Aufgabe XIX. (Fig. 19.).

Zwischen die Schenkel des Winkels, welchen die gegebenen Linien HE, KF mit einander bilden, eine gerade Linie HK der, der Lage nach gegebenen, geraden Linie PQ parallel zu legen, welche ein Dreieck HBK abschneide, dessen Flächenraum dem Quadrate der gegebenen geraden Linien a gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey $\triangle HBK$ das verlangte, so ist, wenn $BC = a$ genommen, das Quadrat ABCD construirt, durch den Durchschnitt F der Linien AD, KF die Linie FE ‡ PQ gezogen wird,

$$\left.\begin{matrix} \triangle BFE : \triangle KBH \\ EB^2 : BH^2 \end{matrix}\right\} = \triangle BFE : \left\{\begin{matrix} BC^2 \\ \triangle BDM, \text{ wenn } MA = AB; \end{matrix}\right.$$

$$= EB : BM \text{ (El. VI., 1.)}$$

$$= EB^2 : EB.BM$$

$$\text{also } BH^2 = EB.BM;$$

mithin ist BH, somit H, und die Lage der Linie HK gegeben.

Construction.

Man mache $BC = a$, construire das Quadrat $ABCD$, ziehe durch den Durchschnitt F der Linien KF, AD die Linie $FE \# PQ$, nehme auf den Verlängerungen von AB die Linien $MA = AD$, $LB = BE$, beschreibe über ML, als Durchmessern, einen Kreis, welcher die Linie BH in H schneide, u. ziehe $HK \# PQ$, so ist HBK das verlangte Dreieck.

Beweis.

Es ist $HB^2 = LB.BM$ (El. VI. 17.)

$$\left.\begin{array}{l} \text{also } EB^2:BH^2 \\ \triangle BFE:\triangle KBH \end{array}\right\} \begin{array}{l} = EB^2:EB.BM \\ = EB:BM \\ = \triangle BFE:\left\{\begin{array}{l}\triangle BDM \\ BC^2 \\ a^2\end{array}\right. \end{array}$$

folglich $\triangle KBH = a^2$.

Zusatz.

Zieht man durch den zweiten Durchschnitt H' des Kreises und der Linie EH die gerade Linie $H'K'$ der Linie PQ parallel, so ist auch, wie von selbst erhellet, $H'BK'$ ein Dreieck mit der gegebenen Eigenschaft.

Algebraische Behandlung.

Bezeichnet man HB mit x, so ist

$$x^2 = EB.BM$$
$$= 2a.EB$$

also $x = \pm\sqrt{2a.EB}$.

Zusatz.

Die verschiedenen Werthe von x bezeichnen offenbar nichts anderes, als die Linien BH, BH'. Und da das Dreieck $H'BK' = +a^2$, wie das Dreieck HBK, so unterscheidet die Algebra gleiche Dreiecke, welche in Vertikalwinkeln liegen, nicht durch die Zeichen $+ -$.

Aufgabe XX. (Fig. 20.)

Durch einen innerhalb des gegebenen Winkels DCE gegebenen Punkt O eine gerade Linie AB zwischen die Schenkel des Nebenwinkels zu legen, dass das Dreieck ACB dem Quadrate der gegebenen geraden Linie q gleich werde.

Algebraische Auflösung.

Es sey ABC das verlangte Dreieck, so ist, wenn OD der Linie CE parallel gezogen, und $\triangle DKC$ dem Dreieck ABC gleich gemacht wird,

$$\left.\begin{array}{l} AC:\left\{\begin{array}{l} CD \\ OE \end{array}\right\} \\ CB:BE \end{array}\right\} = KC:CB \quad \text{, wenn } OE \# DC;$$

$$\text{also } BC:\left\{\begin{array}{c} EB-BC \\ CE \end{array}\right\} = CK:\left\{\begin{array}{c} BC-CK \\ KB \end{array}\right.$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{r} CB.BK \\ CB(BC-CK) \\ x(x-CK) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} EC.CK \\ \\ a.CK, \end{array}\right. \quad \text{wenn } CB = x, \ CE = a \text{ gesetzt wird;}$$

$$\text{mithin } (x-\tfrac{1}{2}CK)^2 = \tfrac{1}{4}CK^2 + a.CK$$

$$\text{demnach } x = \tfrac{1}{2}CK \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}CK^2 + a.CK)}.$$

$$\text{Da } \triangle DCK = \triangle ABC = q^2$$

so ist auch $\frac{1}{2}KC.CF = q^2$, wenn CF auf BC perpendikular aufgerichtet, u. bis zum Durchschnitt mit OD verlängert wird;

$$\text{also } KC = \frac{2q^2}{CF}$$

$= \frac{2q^2}{b}$, wenn man CF = b setzt;

folglich ist $x = \frac{q^2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{q^4}{b^2} + a.\frac{2q^2}{b}\right)}$.

Es hat mithin x zwey der absoluten Grösse nach ungleiche Werthe, wovon der eine positiv, der andere negativ ist.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Ist ABC das gesuchte Dreieck, so ist nach Obigem CB.BK = EC.CK. Da EC, CK gegeben sind, und CB—BK = KC, so ist (Euclids Data 84.) CB, somit der Punkt B und die gerade Linie OB gegeben.

Construction.

Man mache OD ⫲ CE, richte in C auf BC ein Perpendikel auf, welches der Linie OD in F begegne, nehme auf derselben CH = 2q, auf CB die Linie CG = q, ziehe die gerade Linie FG, und durch H eine derselben parallel laufende, die Linie CB in K schneidende, Linie, mache OE ⫲ CD, beschreibe über KE einen Halbkreis, welcher die Linie CH in M schneide, halbire CK in Q, beschreibe aus Q als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Halbmesser = QM, welcher die verlängerte CK in B erreiche, und ziehe die, die Linie CD in A schneidende, gerade Linie QB, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis.

Es ist $CB.BK = CM^2$
$= KC.CE$

also $BC:CE = CK:KB$

$$\text{folglich}\quad \left.\begin{array}{l} CB : \left\{\begin{array}{c} BC+CE \\ BE \end{array}\right\} \\ AC : \left\{\begin{array}{c} OE \\ CD \end{array}\right\} \end{array}\right\} = KC : \left\{\begin{array}{c} CK+KB \\ CB \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } \triangle ABC &= \triangle KCD \\ &= \tfrac{1}{2} FC.CK \\ &= \tfrac{1}{2} HC.CG, \quad \text{weil } FC:CH = GC:CK; \\ &= \tfrac{1}{2}.2q.q \\ &= q^2. \end{aligned}$$

Zusatz 1.

Der Kreis, dessen Mittelpunkt Q ist, schneidet auch die verlängerte KC in einem Punkte B′, welcher, weil $QM < QE$ (El. III. 7.), zwischen C, E liegt, so dass also die gerade Linie OB′ in ihrer Verlängerung der verlängerten DC in einem Punkte A′ begegnet.

$$\begin{aligned} \text{Auch ist } CB'.B'K &= CM^2 \\ &= KC.CE \end{aligned}$$

$$\text{folglich } B'C:CE = CK:KB'$$

$$\text{mithin}\quad \left.\begin{array}{l} CB' : \left\{\begin{array}{c} EC-CB' \\ B'E \end{array}\right\} \\ A'C : \left\{\begin{array}{c} OE \\ CD \end{array}\right\} \end{array}\right\} = KC : \left\{\begin{array}{c} B'K-KC \\ CB' \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \text{somit } \triangle A'B'C &= \triangle KCD \\ &= q^2. \end{aligned}$$

Zusatz 2.

Der negative Werth von x bezeichnet die Linie CB′, welche mit der durch den positiven Werth bezeichneten Linie BC in gerade entgegengesezter Richtung liegt.

Zusatz 3.

Der negative Werth löset die Aufgabe ganz in demselben Sinne auf, in welchem sie der positive auflöset.

Zusatz 4.

Da das Dreieck A'B'C eben so, wie △ ABC = + q^2 gefunden wird, so werden zwey gleiche Dreiecke, welche wie diese, um Vertikalwinkel liegen, von der Algebra nicht durch die Zeichen + — unterschieden.

Zusatz 5.

$$\text{Da } \left.\begin{array}{r} \triangle A'B'C \\ q^2 \\ \triangle ABC \\ AC.CB.\sin.ACB \end{array}\right\} = A'C.CB'.\sin.A'CB'$$

so ist sin. A'CB' = sin. ACB, somit sin. A'CB' positiv, wie sin. ACB. Es haben also die Sinus zweyer Vertikalwinkel einerley Zeichen. Sind mithin zwey Sinus der absoluten Grösse nach einander gleich, in den Zeichen aber verschieden, so sind die ihnen zugehörigen Winkel nicht Vertikalwinkel.

Aufgabe XXI. (Fig. 21.)

Von einem innerhalb eines gegebenen Winkels GBA gegebenen Punkt O eine gerade Linie zu ziehen, welche den einen Schenkel und die Verlängerung des anderen so schneide, dass das Rechteck aus den Segmenten, welche zwischen diesen Durchschnittspunkten und der Spitze des Winkels liegen, dem Quadrate der gegebenen geraden Linie q gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey Ox die gesuchte Linie, also $LB.Bx = q^2$, so ist, wenn OA der Linie BG parallel gezogen, und $OA.BE = q^2$ gemacht wird,

$$LB.Bx = OA.BE$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{l} OA:LB \\ Ax:xB \end{array}\right\} = xB:BE$$

$$\text{folglich } AB:Bx = xE:EB$$

$$\text{mithin } Bx.xE = AB.BE.$$

Da AB, BE gegeben sind, so ist Bx.xE, und weil $Bx - xE = BE$ ist, auch Bx, somit die Linie Ox der Lage nach gegeben.

Corstruction.

Man ziehe die geraden Linien GO, OA den Linien AB, BG parallel, nehme $HB = BK = q$, ziehe die, die verlängerte AB in E schneidende, Linie KE der geraden Linie GH parallel, beschreibe über AE einen Halbkreis, welcher von dem auf AB aufgerichteten Perpendikel BM in M geschnitten werde, halbire BE in F, ziehe die gerade Linie FM, und beschreibe aus F als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = FM, welcher der verlängerten BE in x begegne, und ziehe die, die Linie BG in L schneidende, gerade Linie Ox, so ist dieselbe die verlangte.

Beweis.

$$\text{Es ist } Bx.xE = BM^2$$
$$= AB.BE$$

$$\text{also } AB:Bx = xE:EB$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{l} Ax:xB \\ OA:BL \end{array}\right\} = xB:BE$$

$$\text{mithin } LB.Bx = OA.BF = GB.BE = HB.BK = q^2.$$

Zusatz.

Nimmt man auch $Fx' = F'M$, so liegt, weil $\left.\begin{matrix}FM\\Fx'\end{matrix}\right\} < FA$, der Punkt x' zwischen den Punkten A, B, also schneidet die gerade Linie Ox' in ihrer Verlängerung die Verlängerung von GB in einem Punkte L'.

$$\text{Auch ist } Bx'.x'E = AB.BE$$

$$\text{folglich } AB:Bx' = x'E:EB$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix}Ax':x'B\\OA:BL'\end{matrix}\right\} = x'B:BE$$

$$\text{somit } L'B.Bx' = OA.BE = q^2;$$

demnach ist eine zweite Linie Ox' mit der gegebenen Eigenschaft gefunden.

Algebraische Auflösung.

Es sey $Bx = x$, so ist

$$\left.\begin{matrix}x(x-BE)\\x^2-x.BE\end{matrix}\right\} = \begin{matrix}AB.BE\\c.BE,\end{matrix}$$ wenn $AB = c$ gesetzt wird;

$$\text{folglich } x^2 - x.BE + \tfrac{1}{4}BE^2 = \tfrac{1}{4}BE^2 + c.BE$$

$$\text{mithin } x = \tfrac{1}{2}BE \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}BE^2 + c.BE)}$$

$$= \frac{q^2}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{q^4}{4b^2} + c.\frac{q^2}{b}\right)},$$

wenn $GB = OA = b$ gesetzt wird; demnach hat x zwey ungleiche Werthe, wovon der eine positiv, der andere negativ ist, und jener die Linie Bx,

dieser die Linie Bx′ bezeichnet, von welchen die eine der anderen gerade entgegengesetzt ist.

Zusatz.

Da sowohl $\triangle LBx$, als $\triangle L'Bx' = q^2$, so unterscheidet die Algebra Dreiecke, welche, wie diese, in Vertikalwinkeln liegen, nicht durch die Zeichen $+ -$.

Aufgabe XXII. (Fig. 22.)

Ein Dreieck zu beschreiben, dessen Winkel und Flächenraum gegeben seyen.

Algebraische Auflösung.

Es sey ABC das gesuchte Dreick, so ist

$$CA : AB = \sin B : \sin C$$
$$AB : BD = 1 : \sin A$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{l} AC : BD \\ AC^2 : AC.BD \end{array}\right\} = \sin B : \sin A . \sin C$$

$$\text{folglich } AC^2 : \tfrac{1}{2} AC.BD = 2 \sin B : \sin A . \sin C.$$

Setzt man $AC = x$, und soll der Flächenraum dem Quadrate der gegebenen geraden Linie q gleich werden,

$$\text{so ist } x^2 : q^2 = 2 \sin B : \sin A . \sin C$$

$$\text{mithin } x^2 = \frac{q^2 . 2 \sin B}{\sin A . \sin C}$$

$$\text{also } x = \pm q \sqrt{\left(\frac{2 \sin B}{\sin A . \sin C}\right)}$$

Der Werth von BD, welcher $= \frac{2 q^2}{AC}$,

$$\text{wird } = \frac{2 q^2}{\pm q \sqrt{\left(\frac{2 \sin B}{\sin A . \sin C}\right)}}$$

$$= \pm 2 q \sqrt{\left(\frac{\sin A . \sin C}{2 \sin B}\right)}$$

$$= \pm q \sqrt{\left(\frac{2 \sin A . \sin C}{\sin B}\right)}.$$

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, BD perpendikular auf AC, $AQ \# BD$, $AQ = 2q$, $QE \# AC$. Durch den Durchschnitt E der Linien QE, EA sey $EF \# BC$ gezogen, auch EG perpendikular auf AF gefällt. So

$$\text{ist } CA:AB = FA:AE$$
$$AB:BD = AE:EG$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} AC:BD \\ AC^2:AC.BD \end{matrix}\right\} = AF:EG$$

$$\text{folglich } AC^2:\left\{\begin{matrix} \frac{AC.BD}{2} \\ q^2 \end{matrix}\right\} = AF:\left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}EG \\ \frac{1}{2}AQ \\ AL \\ q \end{matrix}\right.$$
$$= q.AF:q^2$$

$$\text{mithin } AC^2 = q.AF$$

$$\text{somit } q:AC = CA:AF.$$

Da q gegeben ist, uud AF gefunden werden kann, so lässt sich AC und das ganze Dreieck ABC finden.

Construction.

Man mache FAE = dem einen der gegebenen Winkel, richte in A ein Perpendikel $AQ = 2q$ auf, ziehe der Linie AF die Linie QE parallel, welche der Linie AE in E begegne, lege in E an AE den Winkel AEF dem zweiten der gegebenen Winkel gleich, bezeichne mit F den Durchschnitt der Linien AF, FE, verlängere QA um AH = AF, halbire QA in L, beschreibe über LH, als Durchmessern, einen Kreis, welcher die Linie AF in C schneide, und ziehe $CB \# EF$, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis.

$$\text{Es ist}\ \left.\begin{matrix}LA\\q\end{matrix}\right\}:AC = CA:\left\{\begin{matrix}AH\\AF\end{matrix}\right.$$

$$\text{also}\ AC^2 = q.AF$$

$$\text{folglich}\ AC^2:q^2 = q.AF:q^2$$
$$= AF:\left\{\begin{matrix}q\\AL\\\frac{1}{2}AQ\\\frac{1}{2}EG\end{matrix}\right., \quad \text{wenn}\ EGF = R;$$
$$= AC:\tfrac{1}{2}BD$$
$$= AC^2:\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}AC.BD\\\triangle ABC\end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin}\ \triangle ABC = q^2.$$

Zusatz 1.

Zieht man durch den zweiten Durchschnitt C' des Kreises mit der Linie FA eine gerade Linie $C'B'$ mit EF parallel, und verlängert EA bis zum Durchschnitt mit derselben in B', so ist auch

$$LA:AC' = C'A:\left\{\begin{matrix}AH\\AF\end{matrix}\right.$$

$$\text{also}\ AC'^2 = LA.AF$$
$$= q.AF$$

$$\text{folglich}\ AC'^2:q^2 = q.AF:q^2$$
$$= AF:\left\{\begin{matrix}q\\\frac{1}{2}EG\end{matrix}\right.$$
$$= AC':\tfrac{1}{2}B'D', \quad \text{wenn}\ B'D'A = R;$$
$$= AC'^2:\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}AC'.B'D'\\\triangle AB'C'\end{matrix}\right.$$

mithin $\triangle$ AB'C' = q^2.

Zusatz 2.

Das Dreieck AB'C', welches um den Verticalwinkel des Winkels BAC liegt, ist nicht in einem solchen Gegensatze zu dem Dreiecke ABC, wie ihn die Algebra durch die Zeichen + — ausdrückt.

Zusatz 3.

Die Geometrie construirt zwey gleiche, in entgegengesetzter Richtung liegende, Grundlinien, gleichwie die Algebra zwey absolut gleiche, mit entgegengesetzten Zeichen versehene Werthe für dieselben angiebt.

Zusatz 4.

Da die Algebra auch für CB zwey einander gleiche, mit entgegengesetzten Zeichen versehene, Werthe angiebt, und die Geometrie die geraden Linien CB, C'B', welche einander parallel sind, construirt, so unterscheidet die Algebra zwey einander gleiche, auf verschiedenen Seiten einer geraden Linie liegende, einander parallele, gerade Linien durch die Zeichen + —.

Zusatz 5.

Dasselbe gilt von den beiden Perpendikeln BD, B'D', welche die Algebra durch + — unterscheidet.

Zusatz 6.

Da AC'.C'B'.sin.AC'B' = q^2, gleichwie AC.CB.sin.ACB = q^2, so hat sin'.ACB' das Zeichen +, wie sin.ACB. Die Winkel AC'B' und ACB, welche Wechselwinkel zwischen parallelen geraden Linien sind, sind also nicht solche, deren Sinus die Algebra mit entgegengesetzten Zeichen versieht.

Aufgabe XXIII. (Fig. 25.)

Von einem Punkte C der Peripherie eines gegebenen Kreises ein Perpendikel CB auf den gegebenen Diameter GH zu fällen, dass das Rechteck aus diesem Perpendikel und dem zwischen demselben und dem Mittelpunkte A gelegenen Segmente des Diameters dem Quadrate der gegebenen geraden Linie q gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey C der gesuchte Punkt, so ist, wenn das Perpendikel BO auf AC gefällt wird,

$$AC.BO = AB.BC$$
$$= q^2$$

$$\text{also } AC:q = q:BO;$$

folglich ist BO der Grösse nach, somit das Dreieck ABC der Art und Grösse, mithin auch AB der Grösse nach, also der Punkt B, so wie der Punkt C gegeben.

Construction.

Man errichte auf GH in dem Punkte A ein Perpendikel, nehme KA = AP = q, ziehe die gerade Linie GK, mache PL ⧺ GK, bezeichne den Durchschnitt der Linie PL und der Verlängerung von AK mit L, lege durch L die Linie LN ⧺ GH, beschreibe über AG als Durchmessern einen Kreis, welcher die Linie LN in M erreiche, ziehe die gerade Linie AM, mache AB = AM, und errichte in B ein Perpendikel auf AB, so ist der Durchschnitt desselben mit dem Kreise der gesuchte Punkt.

Determination.

Damit der Kreis über AG der Linie LN begegne, muss

$$AL \begin{matrix}=\\<\end{matrix} \tfrac{1}{2} AG \text{ seyn}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} PA:AL \\ GA.\left\{\begin{matrix}AK\\q\end{matrix}\right\}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}=\\>\end{matrix} \left\{\begin{matrix}PD\\q\end{matrix}\right\} : \tfrac{1}{2} AG$$

$$\text{folglich } \tfrac{1}{2} AG^2 \begin{matrix}=\\>\end{matrix} q^2$$

$$\text{mithin } AG^2 \begin{matrix}=\\>\end{matrix} 2q^2.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } AG^2 \begin{matrix}=\\>\end{matrix} 2q^2$$

$$\text{also } \tfrac{1}{2} AG^2 \begin{matrix}=\\>\end{matrix} q^2$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix}AG:q\\q:AL\end{matrix}\right\} \begin{matrix}=\\>\end{matrix} q:\tfrac{1}{2} AG$$

$$\text{mithin } AL \begin{matrix}=\\<\end{matrix} \tfrac{1}{2} AG;$$

demnach berührt, oder schneidet der Kreis die Linie LN in einem Punkt M.

$$\text{Ferner ist } CA = AG,\ BA = AM$$

$$\text{also } CB = GM$$

$$\begin{aligned}\text{folglich } CB.BA &= GM.MA \\ &= GA.AL \\ &= KA.AP \\ &= q^2.\end{aligned}$$

Zusatz 1.

Macht man auch B′A = AM, und errichtet in B′

ein den Kreis in C′ schneidendes Perpendikel auf GH, so ist auch C′ ein Punkt mit der gegebenen Eigenschaft.

Zusatz 2.

Ist der Punkt M ein Berührungspunkt, so giebt es die angegebenen beiden Punkte C, C′ mit den gegebenen Eigenschaften. Ist der Punkt M ein Durchschnittspunkt, so bestimmt der zweite Durchschnitt N noch zwey andere Punkte mit der gegebenen Eigenschaft, wie von selbst erhellet.

Algebraische Darstellung.

Setzt man $AB = x$, $BC = y$, $AH = r$, so ist

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad xy = q^2$$

folglich $x^2 + 2xy + y^2 = r^2 + 2q^2$, $x^2 - 2xy + y^2 = r^2 - 2q^2$

also $x + y = \pm \sqrt{(r^2 + 2q^2)}$, $x - y = \pm \sqrt{(r^2 - 2q^2)}$

$$\text{mithin } x = \frac{\pm \sqrt{(r^2+2q^2)} \pm \sqrt{(r^2-2q^2)}}{2}$$

$$y = \frac{\pm \sqrt{(r^2+2q^2)} \mp \sqrt{(r^2-2q^2)}}{2}$$

Es haben also x, y vier Werthe

$$x = + \frac{\sqrt{(r^2+2q^2)} + \sqrt{(r^2-2q^2)}}{2}$$

$$x = + \frac{\sqrt{(r^2+2q^2)} - \sqrt{(r^2-2q^2)}}{2}$$

$$x = - \frac{\sqrt{(r^2+2q^2)} - \sqrt{(r^2-2q^2)}}{2}$$

$$x = - \frac{\sqrt{(r^2+2q^2)} + \sqrt{(r^2-2q^2)}}{2}$$

$$y = + \frac{\sqrt{(r^2+2q^2)} - \sqrt{(r^2-2q^2)}}{2}$$

$$y = + \frac{\sqrt{(r^2+2q^2)} + \sqrt{(r^2-2q^2)}}{2}$$

$$y = -\frac{\surd(r^2+2q^2)+\surd(r^2-2q^2)}{2}$$

$$y = -\frac{\surd(r^2+2q^2)-\surd(r^2-2q^2)}{2},$$

von welchen die Werthe von x ohne Zweifel nichts anderes bezeichnen, als in der Ordnung die Linien AB″, AB, AB‴, AB′, die Werthe von y die Linien B″C″, BC, B‴C‴, B′C′.

Zusatz.

Wenn man aus der zweiten Gleichung den Werth von $y = \frac{q^2}{x}$ genommen, und $x^2+\frac{q^4}{x^2} = r^2$ gesetzt hätte,

so wäre $x^4+q^4 = r^2x^2$ gefunden worden,

also $x^4-r^2x^2 = q^4$

folglich $x^4 - r^2x^2 + \frac{1}{4}r^4 = \frac{1}{4}r^4 - q^4$

mithin $x^2 = \frac{1}{2}r^2 \pm \surd(\frac{1}{4}r^4 - q^4)$

somit $x = \pm\surd(\frac{1}{2}r^2 \pm \surd(\frac{1}{4}r^4-q^4))$.

Es hätte demnach x ebenfalls vier verschiedene Werthe erhalten, welche mit den oben gefundenen einerley sind. Und sämmtliche lösen die Aufgabe in dem Sinne ihrer Aussage auf.

Aufgabe XXIV. (Fig. 24. a. b.)

Von einem gegebenen Punkte O durch zwey gegebene, einander in F schneidende, gerade Linien AB, CD eine gerade Linie OxL zu ziehen, dass das Rechteck aus dem Segmente Fx und dem, zwischen dem Punkte L und dem auf der Verlängerung von DF gegebenen Punkte G

gelegenen, Segmente GL dem Quadrate der gegebenen geraden Linie q gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey OL die gesuchte Linie, so ist, wenn OH der Linie AB parallel gezogen, und OH . GE = q^2 gemacht wird, OH.GE = Fx.GL

also $\left.\begin{matrix} OH:Fx \\ HL:LF \end{matrix}\right\} = LG:GE$

folglich HF:FL = LE:EG

mithin FL.LE = HF.EG.

Da HF, EG gegebene Linien sind, so ist das Rechteck FL.LE der Grösse nach, und weil FL + LE = FE gegeben ist, die Linie FL, der Punkt L, und die gerade Linie OL gegeben.

Construction.

Man mache OP♯FC, GP♯AB, QG = GT = q, ziehe die Linie QE der geraden Linie PT parallel, beschreibe über FE einen Halbkreis, richte auf GH die Perpendikel NF, EM auf, nehme NF = FH, ME = EG, ziehe die gerade Linie MN, welche dem Halbkreise in R begegne, lasse auf FG das Perpendikel RL herab, und ziehe die gerade Linie OL, so ist dieselbe die verlangte.

Determination.

Damit MN dem Halbkreise begegne, muss

$\left.\begin{matrix} EM.FN \\ EG.FH \end{matrix}\right\} \overline{\leq} \frac{1}{4} FE^2$ seyn,

also $4 EG.FH \overline{\leq} FE^2$

$$\text{folglich } 0 \overset{=}{<} \begin{cases} FG^2 - 2FG.GE + EG^2 - 4EG.FH \\ FG^2 - 2EG(FG+2FH) + EG^2 \end{cases}$$

$$\text{mith. } \left.\begin{matrix} (FG+2HF)^2 \\ FG^2+4GF.FH+ \\ 4HF^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} FG^2 - 2EG(FG+2FH) + EG^2 + (FG+2FH)^2$$

$$\text{somit } 4FH.HG \overset{=}{<} -2EG(FG+2FH) + EG^2 + (FG+2FH)^2.$$

Da das Aggregat der Glieder, welche rechts vom Zeichen der Gleichheit liegen, sowohl $= (EG-(FG+2FH))^2$, als $= ((FG+2FH)-EG)^2$ ist, so muss entweder

$$2\sqrt{(FH.HG)} \overset{=}{<} EG-(FG+2FH), \text{ oder}$$

$$2\sqrt{(FH.HG)} \overset{=}{<} (FG+2FH)-EG \text{ seyn,}$$

$$\text{also entweder } FG+2FH+2\sqrt{(FH.HG)} \overset{=}{<} EG,$$

$$\text{oder } EG \overset{=}{<} FG+2FH-2\sqrt{(FH.HG)}.$$

$$\text{folgl. entweder } \left.\begin{matrix} (FG+2FH+2\sqrt{(FH.HG)}OH) \\ (GH+HF+2\sqrt{(GH.HF)}OH \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \begin{cases} EG.OH \\ EG.GP \\ QG.GT \\ q^2 \end{cases}$$

$$\text{oder } \left.\begin{matrix} EG.OH \\ EG.GP \\ QG.GT \\ q^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \begin{cases} (FG+2FH-2\sqrt{(FH.HG)})OH \\ (GH+HF-2\sqrt{(GH.HF)})OH \end{cases}$$

$$\text{Oder es ist } 2\sqrt{(FH.HG)} \overset{=}{<} \begin{cases} \pm(EG-(FG+2FH))^2 \\ \pm(EG-(GH+HF))^2 \end{cases}$$

$$\text{also entweder } GH+HF+2\sqrt{(GH.HF)} \overset{=}{<} EG$$

---

folglich $OH(GH+HF+2\sqrt{(GH.HF)}) \overset{=}{<} \begin{cases} EG.OH \\ EG.GP \\ QG.GF \\ q^2 \end{cases}$

oder $EG \overset{=}{<} GH+HF-2\sqrt{(GH.HF)}$

mithin $\left.\begin{matrix} EG.OH \\ q^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} OH(GH+HF-2\sqrt{(GH.HF)})$.

Jenes ist die Determination für den Fall, dass der Punkt L zwischen G, F, dieses für den Fall, dass derselbe auf der Verlängerung von GH liege. Beide Determinationen führen auf die Bedingung, dass $4GH.HF \overset{=}{<} EG^2-2EG(FG+2FH)+(FG+2FH)^2$ werde, und finden durch das doppelte Zeichen $\pm$ vor der Wurzelgrösse $(EG-(FG+2FH))$ ihre Erledigung.

Beweis.

Es ist für den einen Fall

$OH(GH+HF+2\sqrt{(GH.FH)}) \overset{=}{<} \begin{cases} q^2 \\ QG.GF \\ EG.GP \\ EG.OH \end{cases}$

also $GH+HF+2\sqrt{(GH.HF)} \overset{=}{<} EG$

folglich $2\sqrt{(GH.HF)} \overset{=}{<} \begin{cases} EG-(GH+HF) \\ EG-(FG+2FH) \end{cases}$

mithin $4GH.HF \overset{=}{<} EG^2-2EG(FG+2FH)+(FG+2FH)^2$.

Für den anderen Fall ist $\left.\begin{matrix} q^2 \\ EG.OH \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} OH(GH+HF-2\sqrt{(GH.HF)})$

also $EG \stackrel{=}{<} GH+HF-2\sqrt{(GH.HF)}$

folglich $2\sqrt{(GH.HF)} \stackrel{=}{<} \begin{cases}(GH+HF)-EG\\ FG+2FH-EG\end{cases}$

mithin $4GH.HF \stackrel{=}{<} (FG+2FH)^2-2EG(FG+2FH)+EG^2$

demnach in beiden Fällen

$$\left.\begin{matrix}FG^2\,4GF.FH+4FH^2\\ (FG+2HF)^2\end{matrix}\right\} \stackrel{=}{<} FG^2-2EG(FG+2FH)+EG^2+(FG+2FH)^2$$

somit $0 \stackrel{=}{<} \begin{cases}FG^2-2EG(FG+2FH)+EG^2\\ FG^2-2FG.GE+EG^2-4FH.EG\end{cases}$

also $4FH.EG \stackrel{=}{<} FE^2$

folglich $\left.\begin{matrix}FH.EG\\ EM.FN\end{matrix}\right\} \stackrel{=}{<} \frac{1}{4}FE^2$;

mithin erreicht die Linie MN den Halbkreis in einem Punkte R, so dass

$FL.LE = EM.FN$ (S. die Bücher des Apollonius von Perga de sectione rationis, frey bearbeitet von Diesterweg, Berlin 1824. p. 1.)

$= FH.EG$

demnach $HF:FL = LE:EG$

also $\left.\begin{matrix}HL:LF\\ OH:Fx\end{matrix}\right\} = LG:GE$

folglich $Fx.LG = OH.GE$

$= q^2.$

Zusatz.

Es erhellet von selbst, dass es in beiden Fällen eine einzige, oder eine zweite Linie mit der gegebenen Eigenschaft giebt, je nachdem die Linie MN berührt, oder schneidet.

Algebr. Auflösung.

Es muss nach Obigem der Punkt L so bestimmt werden, dass $FL.LE = HF.EG$ wird. Setzt man $FL = x$, also $LE = FE - x$, so muss seyn

$$x(FE - x) = HF.EG$$

also $$x^2 - FE.x + \tfrac{1}{4}FE^2 = \tfrac{1}{4}FE^2 - HF.EG$$

folglich $$x = \tfrac{1}{2}FE \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}FE^2 - HF.EG)}$$
$$= \tfrac{1}{2}(FG-GE) \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}(FG-GE)^2 - HF.EG)}$$
$$= \tfrac{1}{2}(FG-\frac{q^2}{OH}) \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}(FG-\frac{q^2}{OH})^2 - HF.\frac{q^2}{OH})}$$

mithin $$x = \frac{\tfrac{1}{2}(FG.OH-q^2) \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}(FG.OH-q^2)^2 - HF.OH.q^2)}}{OH}$$

Zusatz 1.

Es hat x zwey, einander gleiche, oder ungleiche, reelle positive Werthe, wenn

$$\tfrac{1}{4}(FG.OH - q^2)^2 \genfrac{}{}{0pt}{}{=}{>} FH.HO.q^2$$

also $$FG^2.OH^2 - 2FG.OH.q^2 + q^4 \genfrac{}{}{0pt}{}{=}{>} 4FH.HO.q^2$$

folglich $$\left.\begin{matrix} q^4 - 2(FG+2FH)OH.q^2 \\ q^4 - 2(GH+HF)OH.q^2 \end{matrix}\right\} \genfrac{}{}{0pt}{}{=}{>} -FG^2.OH^2$$

somit $q^4-2(GH+HF)OH.q^2+(GH+HF)^2.OH^2 \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \begin{cases} (FG+2FH)OH^2-FG^2.OH^2 \\ (FG^2+4GF.FH+4FH^2)OH^2-FG^2.OH^2 \\ 4(GF+FH)FH.OH^2 \\ 4\,GH.HF.OH^2 \end{cases}$

demnach entweder $q^2-(GH+HF)OH \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} 2\sqrt{(GH.HF)}\,HO$

also $q^2 \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} (GH.HF+2\sqrt{(GH.HF)})OH$

oder $(GH+HF)OH-q^2 \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} 2\,OH\sqrt{(GH.HF)}$

also $q^2 = (GH+HF-2\sqrt{(GH.HF)})OH.$

Daraus erhellet, dass, weil die beiden oben angedeuteten Fälle ihre Determination in demselben Ausdrucke liegen haben, der doppelte Werth jener Wurzel von $q^4-2(GH+HF)OH.q^2+(GH+HF)^2OH^2$ eine reelle Bedeutung habe.

Zusatz 2.

Die Geometrie legt wieder die Linien, welche die Algebra mit dem Zeichen (+) behaftet, von F aus in dieselbe Richtung

Aufgabe XXV. (Fig. 25.).

Ein Dreieck auf einer Grundlinie = der gegebenen geraden Linie a zu beschreiben, in welchem die Radien der um und in dasselbe zu beschreibenden Kreise den gegebenen geraden Linien R, r gleich seyen.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, so ist, wenn BC als der Lage nach gegeben angenommen wird, der um dasselbe zu beschreibende Kreis der Lage und Grösse nach

gegeben. Zieht man die, die Spitze A und den Mittelpunkt D des in das Dreieck beschriebenen Kreises verbindende, gerade Linie AD, so ist BAD=DAC, oder, wenn die Verlängerung von AD den grösseren Kreis in G schneidet, BAG = GAC, also arc. BG = arc. GC, mithin der Punkt G, somit die gerade Linie BG gegeben.

$$\text{Ferner ist } GBD = GBC + CBD = \left\{\begin{matrix} GAC \\ DAB \end{matrix}\right\} + DBA = GDB$$

also $BG = GD$;

mithin liegt der Punkt D auf dem Umfange eines gegebenen Kreises.

Fällt man von D auf BC das Perpendikel DL, so ist DL = r, folglich liegt der Punkt D auch auf einer, der Linie BC in einer Entfernung = r parallel gezogenen, geraden Linie, mithin ist er gegeben, somit die von dem Punkte B an den aus D als Mittelpunkte mit einem Radius = r beschriebenen Kreis gelegte Tangente, also auch der Durchschnitt derselben mit der Verlängerung der Linie GD, folglich das Dreieck ABC gegeben.

Construction.

Man mache BC = a, beschreibe um BC als Sehne einen Kreis, dessen Radius = R, halbire dessen Bogen BGC in G, ziehe die gerade Linie GB, beschreibe aus G als Mittelpunkte einen Kreis mit einem Radius = GB, halbire BC in F, ziehe die gerade Linie GF, nehme auf der Verlängerung derselben KF = r, ziehe der Linie BC die Linie KD parallel, welche dem Kreise, dessen Mittelpunkt G ist, in D begegne, beschreibe aus D als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = r, lege an denselben die Tangente BA, welcher die gerade Linie GD in

ihrer Verlängerung in A begegne, und ziehe die gerade Linie AC, so ist △ABC das gesuchte.

Determination.

Damit die Linie KD den Kreis erreiche, dessen Mittelpunkt G ist, muss, wenn die verlangerte GF dem Bogen BHC in H begegnet,

$$r \stackrel{=}{<} \begin{cases} FH \text{ seyn;} \\ HG - GF \\ BG - GF \end{cases}$$

$$\text{also } r + GF \stackrel{=}{<} BG$$

$$\text{folglich } r^2 + 2r.GF + GF^2 \stackrel{=}{<} \begin{cases} BG^2 \\ BF^2 + FG^2 \end{cases}$$

$$\text{mithin } r^2 + 2r.GF \stackrel{=}{<} \begin{cases} BF^2 \\ \tfrac{1}{4}a^2 \end{cases}$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} GF \\ \left.\begin{matrix} GO \\ R \end{matrix}\right\} - OF \end{matrix}\right\} \stackrel{=}{<} \frac{\tfrac{1}{4}a^2 - r^2}{2r}$$

$$\text{demnach } R - \frac{\tfrac{1}{4}a^2 - r^2}{2r} \stackrel{=}{<} OF$$

$$\text{also } \left(R - \frac{\tfrac{1}{4}a^2 - r^2}{2r}\right)^2 \stackrel{=}{<} \begin{cases} OF^2 \\ R^2 - \tfrac{1}{4}a^2 \end{cases}$$

$$\text{folglich } \left(\frac{2Rr - \tfrac{1}{4}a^2 + r^2}{2r}\right)^2 + \tfrac{1}{4}a^2 \stackrel{=}{<} R^2$$

$$\text{mithin } 4R^2r^2 - Rra^2 + \tfrac{1}{16}a^4 + 4Rr^3 - \tfrac{1}{2}a^2r^2 + r^4 + a^2r^2 \stackrel{=}{<} R^2.4r^2$$

$$\text{somit } -Rra^2 + \tfrac{1}{16}a^4 + 4Rr^3 + \tfrac{1}{2}a^2r^2 + r^4 \stackrel{=}{<} 0$$

demnach $\frac{1}{16}a^4+\frac{1}{2}a^2r^2+r^4 \overset{=}{<} Rr(a^2-4r^2)$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}\dfrac{(r^2+\frac{1}{4}a^2)^2}{r(a^2-4r^2)} \\[2ex] \dfrac{(r^2+\frac{1}{4}a^2)^2}{4r(\frac{1}{4}a^2-r^2)} \\[2ex] \dfrac{(\frac{1}{4}a^2+r^2)^2}{4r(\frac{1}{4}a^2-r^2)}\end{matrix}\right\} \overset{=}{<} R.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \frac{(\frac{1}{4}a^2+r^2)^2}{4r(\frac{1}{4}a^2-r^2)} \overset{=}{<} R$$

$$\text{also } \left(\frac{2Rr-\frac{1}{4}a^2+r^2}{2r}\right)^2 \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix}R^2-\frac{1}{4}a^2 \\ OF^2\end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } R-\frac{\frac{1}{4}a^2-r^2}{2r} \overset{=}{<} OF$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix}R-OF \\ GF\end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \frac{\frac{1}{4}a^2-r^2}{2r}$$

$$\text{somit } 2r.GF \overset{=}{<} \tfrac{1}{4}a^2-r^2$$

$$\text{demnach } r^2+2r.GF \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix}\frac{1}{4}a^2 \\ BF^2\end{matrix}\right.$$

$$\text{also } r^2+2rGF+GF^2 \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix}BF^2+FG^2 \\ BG^2\end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } r+GF \overset{=}{<} BG$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} r \\ FK \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \left\{\begin{matrix} BG - GF \\ FH; \end{matrix}\right.$$

demnach erreicht die Linie DK den Kreis, dessen Mittelpunkt G ist.

Auch ist DG = GB

$$\text{also } \left.\begin{matrix} GBD \\ CBD + CBG \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} GDB \\ GAB + ABD \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} CBG \\ BCG \end{matrix}\right\} = DAB;$$

mithin liegt der Punkt A auf dem Umfange des Kreises BGC. Demnach ist GAC = GBC = DAB, also ist AC eine Tangente des Kreises NLM, folglich hat △ABC die gegebenen Eigenschaften.

Zusatz 1.

Es erhellet von selbst, dass es im Fall der Berührung des Kreises, dessen Mittelpunkt G ist, durch die gerade Linie KD, ein einziges, im Fall des Durchschnittes ein zweites, durch den zweiten Durchschnitt D'' bestimmtes, Dreieck mit den gegebenen Eigenschaften giebt.

Zusatz 2.

Macht man auch KF = r, zieht die den Kreis, dessen Mittelpunkt G ist, in D' schneidende Linie K'D' der Linie BC parallel, fällt auf BC das Perpendikel D'L', beschreibt einen Kreis, welcher D' zum Mittelpunkte, und D'L' zum Radius hat, legt an denselben die Tangente BM', welche von der Linie GD' in A' geschnitten werde, so ist

$$\left.\begin{matrix} GBD' \\ CBD' - CBG \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} GD'B \\ GA'B - A'BD' \end{matrix}\right.$$

$$\text{folgl. } \left.\begin{array}{l} CBD' + \left\{\begin{array}{l} A'BD' \\ D'BL' \\ ABC \end{array}\right\} - GA'B \\ \qquad 2R - GA'B \\ \qquad BA'D' \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} CBG \\ BCG \end{array}\right.$$

$$\text{mithin } BA'D' + \left.\begin{array}{l} BA'G \\ 2R \end{array}\right\} = BCG + BA'G;$$

demnach liegt der Punkt A' auf dem Umfange des Kreises BA'C, also ist $\left.\begin{array}{l} GA'C \\ NA'D' \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} GBC \\ BA'D' \end{array}\right.$, folglich berührt die Linie CA' den Kreis, dessen Mittelpunkt D' ist. Da er auch von CB in L' berührt wird, so ist △BA'C ein auf der gegebenen Grundlinie BC beschriebenes Dreieck, welches in den Kreis BGC, dessen Radius = R ist, beschrieben ist, und von dem Kreise, dessen Radius = r ist, auswendig berührt wird.

Zusatz 3.

Es erhellet von selbst, dass der zweite Durchschnitt D''' der Linie K'D' mit dem Kreise, dessen Mittelpunkt G ist, ein zweites Dreieck mit den gegebenen Eigenschaften bestimmt.

Zusatz 4.

Sucht man die Determination für diesen Fall, so muss, damit die Linie K'D' dem Kreise, dessen Mittelpunkt in G ist, begegne,

$$\left.\begin{array}{r} FK' \\ r \end{array}\right\} \begin{array}{c} = \\ < \end{array} \left\{\begin{array}{c} FH' \\ FG + GH' \\ BG + GF \end{array}\right\}$$ seyn, wenn H' den Endpunkt der Sehne HGH' bezeichnet;

$$\text{also } r - GF \stackrel{=}{<} BG$$

$$\text{folglich } r^2 - 2r.GF + GF^2 \stackrel{=}{<} \begin{cases} BG^2 \\ BF^2 + FG^2 \end{cases}$$

$$\text{mithin } r^2 - 2r.GF \stackrel{=}{<} \begin{cases} BF^2 \\ \frac{1}{4}a^2 \end{cases}$$

$$\text{somit } \frac{r^2 - \frac{1}{4}a^2}{2r} \stackrel{=}{<} \begin{cases} GF \\ \begin{Bmatrix} GO \\ R \end{Bmatrix} - OF \end{cases}$$

$$\text{demnach } OF \stackrel{=}{<} R - \frac{r^2 - \frac{1}{4}a^2}{2r}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} OF^2 \\ R^2 - \frac{1}{4}a^2 \end{matrix}\right\} \stackrel{=}{<} \left(R - \frac{r^2 - \frac{1}{4}a^2}{2r}\right)^2$$

$$\text{folglich } R^2 \stackrel{=}{<} R^2 - \frac{R}{r}(r^2 - \tfrac{1}{4}a^2) + \frac{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)^2}{4r^2} + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\text{mithin } \frac{R}{r}(r^2 - \tfrac{1}{4}a^2) \stackrel{=}{<} \frac{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)^2}{4r^2} + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} 4Rr^3 - Rra^2 \\ R(4r^2 - a^2)r \\ 4Rr(r^2 - \frac{1}{4}a^2) \end{matrix}\right\} \stackrel{=}{<} \begin{cases} (r^2 - \frac{1}{4}a)^2 + a^2r^2 \\ (r^2 + \frac{1}{4}a^2)^2 \end{cases}$$

$$\text{demnach } R \stackrel{=}{<} \frac{(r^2 + \frac{1}{4}a^2)^2}{4r(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}$$

Zusatz 5.

Ist $r^2 > \frac{1}{4}a^2$, so muss, damit der letzte Durchschnitt statt finde, $R \stackrel{=}{<} \frac{(r^2 + \frac{1}{4}a^2)^2}{4r(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}$ seyn. Alsdann aber

ist zugleich $R \underset{<}{=} \frac{(r^2 + \frac{1}{4}a^2)}{(\frac{1}{4}a^2 - r)^2}$, mithin ist, weil $\frac{(r^2 + \frac{1}{4}a^2)^2}{4r(\frac{1}{4}a^2 - r^2)}$ negativ wird, $R < \frac{(r^2 + \frac{1}{4}a^2)^2}{4r(\frac{1}{4}a^2 - r^2)}$; demnach findet die Bedingung der ersten Auflösung, dass $R^2 \underset{>}{=} \frac{(r^2 + \frac{1}{4}a^2)^2}{4r(\frac{1}{4}a^2 - r^2)}$ nicht statt, d. h. diese Auflösung findet nicht statt. Ist dagegen $\frac{1}{4}a^2 \underset{>}{=} r^2$, so ist $R < \frac{(r^2 + \frac{1}{4}a^2)^2}{4r(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}$, also findet die zweite Auflösung statt. Damit die erste statt habe, muss nunmehr $R \underset{>}{=} \frac{(r^2 + \frac{1}{4}a^2)^2}{4r(\frac{1}{4}a^2 - r^2)}$ seyn. Es können also in diesem Falle beide Auflösungen zugleich statt haben, oder nur die eine. Desshalb hätte man in dem Beweise der Aufgabe, als man dahin gekommen war, dass $r^2 + 2r.GF + GF^2 \underset{<}{=} BG^2$ sey, auch folgern sollen, dass $-r - GF \underset{<}{=} BG$ sey, oder da $-r$ nichts anderes ist, als K'F, weil $KF = +r$ gesetzt wurde, dass $K'F - GF \underset{<}{=} BG$ sey,

$$\text{also } K'F \underset{<}{=} \begin{cases} BG + GF \\ FH'; \end{cases}$$

folglich K'F den Umfang des Kreises, welcher D zum Mittelpunkte hat, erreiche, u. s. w. Es ist mithin auch in Fällen, wie der vorliegende, das negative Zeichen vor der Wurzelgrösse durchaus nicht ohne Bedeutung, und nicht unbrauchbar.

Zusatz 6.

Wenn ein Dreieck ABC in dem grösseren Kreise, und um den kleineren liegt, so ist nach Obigem

$$BG = GD$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{l} BG^2 \\ BF^2+FG^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} GD^2 \\ GK^2+KD^2 \end{array}\right.$$

$$= (GF+FK)^2+DO^2 - \left\{\begin{array}{l} OK^2 \\ (KF-FO)^2 \end{array}\right.$$

$$= GF^2+2\,GF.FK+KF^2+DO^2- KF^2+2KF.FO-FO^2$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{l} BF^2+FO^2 \\ BO^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 2FK(GF+FO)+DO^2 \\ = 2FK.GO+DO^2 \end{array}$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{l} BO^2-2FK.GO \\ R^2-2R.r \end{array}\right\} = DO^2.$$

Zusatz 7.

Wenn ein Dreieck A'BC in einen Kreis AGC beschrieben ist, und von einem anderen Kreise BM'N' auswendig berührt wird, so ist

$$GBD' = CBD'-GBC$$

$$= 2R - \left\{\begin{array}{l} CBA \\ D'BL' \\ D'BA' \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} GA'C \\ D'A'N' \\ D'A'B \end{array}\right.$$

$$= A'D'B$$

$$= GD'B$$

$$\text{also } BG = GD'$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{l} BG^2 \\ BF^2+FG^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} GD'^2 \\ GK'^2+K'D'^2 \end{array}\right.$$

$$= (GF-FK')^2+D'O^2 - \left\{\begin{array}{l} OK'^2 \\ (K'F+FO)^2 \end{array}\right.$$

$$= GF^2-2GF.FK'+K'F^2+D'O^2 -K'F^2-2K'F.FO-OF^2$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{l} BF^2+FO^2 \\ BO^2 \end{array}\right\} = D'O^2 - \left\{\begin{array}{l} 2FK'(GF+FO) \\ 2FK'.GO \end{array}\right.$$

somit $\left.\begin{matrix}BO^2+2FK'.GO\\ R+2Rr\end{matrix}\right\} = D'O^2.$

Aufgabe XXVI. (Fig. 26.)

Ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten geometrisch proportionirt seyen, und worin eine Seite der gegebenen geraden Linie a gleich sey.

Algebraische Auflösung.

Es sey die Hypotenuse = a, die kleinere Kathete = x, die grössere = y, so muss seyn

$$a:y = y:x$$

$$\text{also } ax = y^2$$
$$= a^2-x^2$$

$$\text{folglich } x^2+ax = a^2$$

$$\text{mithin } x^2+ax+\tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2.$$

$$\text{somit } x = -\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{(\tfrac{5}{4}a^2)}$$
$$= \tfrac{1}{2}a(-1\mp\sqrt{5}).$$

Zusatz.

Es hat x zwey Werthe, wovon der eine positiv, der andere negativ ist, der positive Werth kleiner, der negative aber, der absoluten Grösse nach, grösser, als a ist.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck, seine Hypotenuse = a, also $CB:BA = BA:AC$

$$\text{so ist } AC.CB = BA^2$$
$$= BC^2-CA^2$$

$$\left.\begin{aligned} \text{mithin } AC.CB+CA^2 \\ AC(BC+CA) \\ AC(a+AC) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &= BC^2. \\ &= a^2 \end{aligned}$$

Da a gegeben ist, so ist AC, somit $\triangle ABC$ gegeben.

Construction.

Man nehme BC = der gegebenen geraden Linie a, halbire sie in D, richte auf ihr das Perpendikel CE auf, mache EC = CB, ziehe die gerade Linie DE, beschreibe aus D als Mittelpunkte einen Kreis mit einem Radius = DE, welcher der verlängerten BC in F begegne, beschreibe über BC einen Halbkreis, lege in denselben die Sehne AC = CF, und ziehe die gerade Linie BA, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis.

$$\left.\begin{aligned} \text{Es ist } BF.FC \\ (BC+CF)FC \\ (BC+CA)AC \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &= CE^2 \\ &= CB^2 \end{aligned}$$

$$\text{also } BC.CA = BC^2 - CA^2 = BA^2$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} CB \\ a \end{matrix}\right\} : BA = BA : AC^2;$$

mithin ist ein rechtwinkliges Dreieck gefunden, worin die Hypotenuse = a ist, und die Seiten geometrisch proportionirt sind.

Zusatz 1.

Macht man CB' = CB, errichtet in B' ein Perpendikel C'A' auf CB', legt in den Winkel CB'A' die gerade Linie CA' = CF', wenn F' den anderen Durchschnitt des Kreises, welcher D zum Mittelpunkte hat, mit der verlängerten CB bezeichnet,

so ist $\left.\begin{array}{l} BF'.F'C \\ (F'C - CB)F'C \\ (A'C - CB)A'C \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} CE^2 \\ CB^{2\prime} \end{array}\right.$

---

also $\left.\begin{array}{l} A'C^2 - CB'^2 \\ A'B'^2 \end{array}\right\} = A'C.CB'$

---

folglich $CB' : B'A' = B'A' : A'C.$

Mithin ist ein rechtwinkeliges Dreieck A'B'C gefunden, in welchem die Seiten geometrisch proportionirt sind, und eine Kathete = a ist.

Zusatz 2.

Da $CB:BA = BA:AC$

---

so ist auch $CB^2 : \left\{\begin{array}{l} BA^2 \\ CB.BG \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} BA^2 : AC^2 \\ CB.BG : BC.CG, \end{array}\right.$ wenn man AG perpendikular auf BC zieht;

---

also $CB:BG = BG:GC$

---

folglich $ML:LK = LK:KM$, wenn BL die Verlängerung von AB ist, F'L#AC, LM #BC gezogen, u. AB, AG bis zum Durchschnitte mit LM in M und K verlängert werden;

---

mithin $LK' = KM.ML.$

Eben so ist $CA' : A'B' = A'B' : B'C$, wenn $B'HA' = R$;

$$\text{also } CA'^2 : \left\{ \begin{matrix} A'B'^2 \\ CA'.A'H \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} A'B'^2 : B'C^2 \\ CA'.A'H : A'C.CH \end{matrix} \right.$$

$$\text{folglich } CA' : A'H = A'H : HC$$

$$\text{mithin } A'H^2 = HC.CA'.$$

Da $ML = CF = CA'$, so ist $A'H = LK$

$$\text{somit } KM = CH$$

$$\text{demnach } \triangle ALM \cong \triangle A'B'C$$

$$\text{also } A'CB'^2 = AML$$

$$= ACB,$$

folglich CA' die Verlängerug von CA.

Zusatz 3.

Der positive Werth von $x = \frac{1}{2}a(-1+\sqrt{5})$ bezeichnet die gerade Linie CF, der negative die ihr gerade entgegengesetzt liegende CF', und es bestimmt diese, wie jene, ein Dreieck, mit den gegebenen Eigenschaften, ganz und gar in dem Sinne der Aufgabe.

Zusatz 4.

Wäre die algebraische Rechnung zuerst für das Dreieck $A'B'C'$ geführt worden, in welchem die Kathete $B'C$ $= a$ gesetzt, CA' mit x, $A'B'$ mit y bezeichnet sey, so hätte gesetzt werden müssen

$$x : y = y : a$$

$$\text{also } ax = y^2$$

$$= x^2 - a^2$$

$$\text{folglich } a^2 = x^2 - ax$$

$$\text{mithin } \tfrac{5}{4}a^2 = (x - \tfrac{1}{2}a)^2$$

$$\text{somit } x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{5}{4}a^2)}$$

$$= \tfrac{1}{2}a(1 \pm \sqrt{5});$$

und der positive Werth von diesem x wäre dem negativen des oben gefundenen, der negative dem positiven des oben gefundenen, der absoluten Grösse nach, gleich geworden.

Aufgabe XXVII. (Fig. 27.)

In einen gegebenen Kreis ein regelmässiges Zehneck zu beschreiben.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey BD eine Seite des gesuchten Zehnecks, so wäre, wenn die Radien BA, AD gezogen werden,

$$BAD = \tfrac{4}{10}R$$
$$= \tfrac{2}{5}R$$

also $ABD = \tfrac{4}{5}R = ADB$

folglich $BDC = \tfrac{2}{5}R = CDA = CAD$, wenn der Winkel ADB durch DC halbirt wird;

mithin $BCD = \tfrac{4}{5}R$, $\left.\begin{matrix}DC\\BD\end{matrix}\right\} = CA$

somit $AB : \left\{\begin{matrix}BD = DB\\AC = AC\end{matrix}\right\} : BC$

demnach $AC^2 = AB.BC$

also die Linie $\left\{\begin{matrix}AC\\BD\end{matrix}\right\}$ gegeben (El. II, 11.)

Construction.

Man ziehe den Diameter BL, lege auf denselben den perpendikularen Halbmesser AH, halbire den Radius AL

in E, ziehe die gerade Linie KH, mache KC = KH, und lege in den Kreis die Sehne BD = AC, so ist BD die Seite des gesuchten Zehnecks.

Beweis.

Es ist (verm. El. II. 11.) $\left.\begin{matrix}AC^2\\BD^2\end{matrix}\right\} = AB.BC$

also AB:BD = DB:BC

folglich $\left.\begin{matrix}ADB\\ABD\end{matrix}\right\} = BCD$ (El. VI, 6.)

mithin CD = DB
= AC

demnach CAD = ADC

somit $\left.\begin{matrix}BCD\\ABD\end{matrix}\right\} = 2\,BAD$

folglich BAD = $\frac{2}{5}$ R
= $\frac{4}{10}$ R,

mithin ist BD die Seite eines in den Kreis zu beschreibenden regelmassigen Zehnecks.

Zusatz.

Macht man auch CK = KH, nimmt BD′ = AC′ in entgegengesetzter Richtung mit BD, gleichwie AC, AC′ in entgegengesetzter Richtung liegen, macht D′A′ ∦ AD, und verlängert AB bis zum Durchschnitte mit D′A′ in A,

so ist D′A′ : A′B = DA:AB

also D′A′ = A′B.

Auch ist D′A′B = DAB
= $\frac{2}{5}$R.

Beschreibt man also einen Kreis, welcher A' zum Mittelpunkt und A'B zum Radius hat, so ist BD' die Seite eines in diesen Kreis zu beschreibenden regelmässigen Zehnecks.

Algebraische Auflösung.

Setzt man die Linie AC = x, so muss seyn

$$x^2 = a(a-x)$$

$$\text{also } x^2 + ax = a^2$$

$$\text{folglich } x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2$$

$$\text{mithin } x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2},$$

von welchen Werthen der dem $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Zeichen der Wurzel entsprechende die Linie $\left\{\begin{matrix}AC\\ AC'\end{matrix}\right\}$, oder $\left\{\begin{matrix}BD\\ BD'\end{matrix}\right\}$ bezeichnet.

Zusatz.

Bestimmt man r so, dass

$$CA:AB = AC':r$$

$$\text{d. i. } \sqrt{(\tfrac{5}{4}a^2)} - \tfrac{1}{2}a : a = \sqrt{(\tfrac{5}{4}a^2)} + \tfrac{1}{2}a : r$$

$$\text{so ist } r = a\frac{\sqrt{(\tfrac{5}{4}a^2)} + \tfrac{1}{2}a}{\sqrt{(\tfrac{5}{4}a^2)} - \tfrac{1}{2}a}.$$

Beschreibt man einen Kreis, dessen Mittelpunkt A' auf der Verlängerung von BA und Radius A'B = r ist, so ist die Seite y des in denselben beschreibbaren regulären Zehnecks $= -\tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{(\tfrac{5}{4}r^2)}$, und der positive Werth von y

$$= -\tfrac{1}{2}r\sqrt{\tfrac{5}{4}r^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}a\frac{\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} + \tfrac{1}{2}a}{\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a} + \sqrt{\left(\tfrac{5}{4}a^2\left(\frac{\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} + \tfrac{1}{2}a}{\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} + \tfrac{1}{2}a}{\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a}\left(\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a\right)$$

$$= \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} + \tfrac{1}{2}a$$

$$\text{also } y - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

$$\text{folglich } y^2 - ay + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2$$

mithin $y^2 - ay = a^2$. Da auch $x^2 + ax = a^2$ war, so ist der positive Werth von y dem negativen von x gleich. Und die Gleichung $x^2 = a(a-x)$ löset also zugleich die Aufgabe auf, in jenen zweiten Kreis ein regelmässiges Zehneck zu beschreiben, weil die Gleichungen für die Seiten der Zehnecke einerley werden.

Aufgabe XXVIII. (Fig. 28.)

Zwey ähnliche gerade Kegel zu beschreiben, deren Unterschied der Höhen = h Fuss, Unterschied der körperlichen Volumina = b Cubikfuss sey, und wovon der kleinere den Radius der Grundfläche = a Fuss habe.

Auflösung.

Es sey die Höhe RQ des kleineren RPL = x, also des grösseren = x + h, so ist, wenn ST den Radius der Grundfläche des grösseren RTV bezeichnet,

$$x : a = x + h : ST$$

$$\text{also } ST = a\,\frac{x+h}{x}$$

$$\text{folglich } \pi . ST^2 = \pi a^2 \left(\frac{x+h}{x}\right)^2$$

$$\text{somit Kegel RTV} = \frac{\pi a^2 (x+h^2}{3x^2}(x+h)$$

$$= \frac{\pi a^2 (x+h)^3}{3x^2}$$

Der Inhalt des Kegels RPL ist

$$= \frac{\pi a^2 x}{3}$$

$$= \frac{\pi a^2 x^3}{3x^2}$$

mithin ist der Unterschied b

$$= \frac{\pi a^2}{3x^2}((x+h)^3 - x^3)$$

$$= \frac{\pi a^2}{3x^2}(3hx^2 + 3h^2x + h^3)$$

demnach $3x^2b = 3\pi a^2hx^2 + 3\pi a^2h^2x + \pi a^2h^3$

somit $3(b-\pi a^2h)x^2 - 3\pi a^2h^2x = \pi a^2h^3$

also $x^2 - \frac{\pi a^2h^2}{(b-\pi a^2h)}x = \frac{\pi a^2h^3}{3(b-\pi a^2h)}$

folglich $\left(x - \frac{\pi a^2h^2}{(b-\pi a^2)}\right) = \frac{\pi^2a^4h^4}{4(b-\pi a^2h)^2} + \frac{\pi a^2h^3}{3(b-\pi a^2h)}$

$$= \pi^2a^2h^3\left(\frac{a^2h}{4(b-\pi a^2h)^2} + \frac{1}{3\pi(b-\pi a^2h)}\right)$$

$$= \pi^2a^2h^3\,\frac{3\pi a^2h + 4(b-\pi a^2h)}{12\pi(b-\pi a^2h)^2}$$

$$= \pi a^2h^3\,\frac{4b-\pi a^2h}{12(b-\pi a^2h)^2}$$

mithin $x = \frac{\pi a^2h^2}{2(b-\pi a^2h)} \pm \frac{ah\sqrt{\left(\pi h\frac{4b-\pi a^2h}{3}\right)}}{2(b-\pi a^2h)}$

$$= \frac{ah}{2(b-\pi a^2h)}\left(\pi ah \pm \sqrt{\left(\pi h\frac{4b-\pi a^2h}{3}\right)}\right)$$

Beispiel. Es sey $a = \frac{1}{2}$, $h = 1$, $b = \frac{13}{16}\pi$, so ist

$$x = \frac{\frac{1}{2}}{2(\frac{13}{16}\pi - \frac{1}{4}\pi)}\left(\frac{1}{2}\pi \pm \sqrt{\left(\frac{\pi\frac{13}{4} - \frac{1}{4}\pi}{3}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{4\cdot\frac{9}{16}\pi}\left(\tfrac{1}{2}\pi \pm \sqrt{(\pi.\pi)}\right)$$
$$= \tfrac{4}{9}(\tfrac{1}{2} \pm 2)$$
$$= \tfrac{2}{9}(1 \pm 2),$$

also hat x zwey Werthe.

Es ist entweder $x = \frac{2}{3}$

oder $x = -\frac{2}{9}$.

Zusatz 1.

Da die Algebra die einander der Lage nach entgegengesetzten Linien durch die Zeichen + — unterscheidet, so bezeichnet der Werth von $x = \frac{2}{3}$ die Linie QR $= \frac{2}{3}$, und der Werth von $x = -\frac{2}{9}$ die derselben entgegengesetzt liegende $QR' = \frac{2}{9}$. Es wird zugleich

$h + x$ entweder $= \frac{5}{3}$

oder $= \frac{7}{9}$;

und r entweder $= \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = 1\tfrac{1}{4}$

oder $= \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{9}}{\frac{2}{9}} = -1\tfrac{3}{4}$;

Kegel RTV entweder $= \pi.\frac{25}{16}.\frac{5}{9} = \pi.\frac{125}{144}$

oder $= \pi.\frac{49}{16}.\frac{7}{27} = \pi\ \frac{343}{432}$;

Kegel RPL entweder $= \pi.\frac{1}{4}.\frac{2}{9} = \frac{1}{18}\pi$.

oder $= \pi.\frac{1}{4}.-\frac{2}{27}\pi = -\frac{1}{54}\pi$.

mithin ist Kegel RTV — Kegel RPL

entweder $= (\frac{125}{144} - \frac{1}{18})\pi = \frac{125 - 8}{144}\pi = \frac{117}{144}\pi = \frac{39}{48}\pi = \frac{13}{16}\pi$

oder. $= (\frac{343}{432} + \frac{1}{54})\pi = \frac{343 + 8}{432}\pi = \frac{351}{432}\pi = \frac{13}{16}\pi$.

Zusatz 2.

Die Algebra unterscheidet zwey Kegel, welche eine Lage haben, wie PRL, PR'L durch die Zeichen + —. Da die Cylinder die dreifachen der Kegel von derselben

Grundfläche und Höhe sind, so werden auch die jenen Regeln correspondirenden Cylinder durch + — unterschieden. Aehnliches gilt von Pyramiden und Prismen.

Zusatz 3.

Es lösste obige Aufgabe zugleich die Aufgabe auf, zwey ähnliche gerade Kegel T'R'V', PR'L zu beschreiben, in welchen die Summe der Höhen = h, die Summe der körperlichen Räume = b, und der Radius der Grundfläche des einen = a sey.

Aufgabe XXIX.

Unter allen geradstehenden Parallelepipedis; deren Inhalt dem Würfel der gegebenen geraden Linie c gleich ist, und welche eine Seitenlinie = der gegebenen geraden Linie a haben, dasjenige zu bestimmen, dessen Oberfläche ausgezeichnet ist.

Auflösung.

Ist die zweite Seitenlinie = x, also die dritte $= \frac{c^3}{ax}$,

so ist die Oberfläche $= 2ax + 2\frac{c^3}{x} + 2.\frac{c^3}{a}$

also die halbe Oberfläche $\left.\begin{matrix}\\ y\end{matrix}\right\} = ax + \frac{c^3}{x} + \frac{c^3}{a}$

folglich $\frac{dy}{dx} = a - \frac{c^3}{x^2}$.

Damit y einen ausgezeichneten Werth erhalte, muss

mithin $a - \frac{c^3}{x^2} = o$ seyn

$$\text{folglich} \quad x^2 = \frac{c^3}{a}$$

$$\text{somit} \quad x = \pm\sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}.$$

$$\text{demnach} \quad \frac{c^3}{ax} = \pm \frac{c^3}{a\sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}}$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}.$$

$$\text{Ferner ist} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2c^3x}{x^4}$$

$$= \frac{2c^3}{x^3}$$

$$= 2\left(\frac{c}{x}\right)^3$$

$$= \pm 2\left[\frac{c}{\sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}}\right]^3$$

$$= \pm 2\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Also ist y ein Minimum für $x = +\sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}$, ein Maximum für $x = -\sqrt{\left(\frac{c^5}{a}\right)}$. Und es ist

$$y = \pm a\sqrt{\frac{c^3}{a}} \pm \frac{c^3}{\sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}} + \frac{c^3}{a}$$

$$= \pm\sqrt{(ac^3)} \pm \sqrt{(ac^3)} + \frac{c^3}{a}$$

$$= \frac{c^3}{a} \pm 2\sqrt{(ac^3)}$$

Anmerkung 1.

Der Werth $x = +\sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}$ beantwortet die Frage in dem Sinne der Aussage, und bestimmt die Dimensionen des Parallelepipedums, dessen Oberfläche ein Minimum ist. Für den Werth $x = -\sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}$ werden die von x abhängigen Seitenflächen negativ, und es bestimmt derselbe die Dimensionen desjenigen Parallelepipedums, in welchem der Ueberschuss der einen Seitenfläche über die von x abhängigen ein Maximum wird. Gleichwie die Algebra immer die positiven und negativen Werthe von x bestimmt, welche einer Gleichung Genüge leisten, so fasst sie in einer einzigen Gleichung die Beantwortung der Fragen zusammen, unter welchen Umständen die Summe dreyer Seitenflächen eines Parallelepipedums, oder der Ueberschuss einer derselben über die übrigen einen ausgezeichneten Werth erhalte.

Anmerkung 2.

Das andere Parallelepipedum fällt in den Verticalwinkel desjenigen, in welchen das erste fällt. Da aber der Inhalt beider $= c^3$, so unterscheidet die Algebra zwey in dieser Weise gelegene einander gleiche Parallelepipede nicht durch die Zeichen + —.

Aufgabe XXX.

Wenn g den freien Fallraum eines Körpers in der ersten Secunde bezeichnet, zu finden, nach wie viel Se-

cunden er sich am Ende einer verticalen Linie von S Fuss befinden werde.

Auflösung.

Es ist, wenn t die gesuchte Anzahl der Secunden bezeichnet,

$$S = gt^2$$

$$\text{also } t^2 = \frac{S}{g},$$

$$\text{folglich } t = \pm \frac{S}{g}.$$

Zusatz.

Fragt man: vor wie viel Secunden befand sich ein Körper beim freien Fall an dem Ende einer verticalen Höhe von S Fuss? und bezeichnet man die gesuchte Zahl von Secunden durch t, so ist

$$S = gt^2$$

$$\text{also } t^2 = \frac{S}{g}.$$

mithin ist $\frac{S}{g}$ der Ausdruck für das Quadrat sowohl der einen, als der anderen Zahl von Secunden, und die Algebra giebt desshalb die beiden Werthe an, indem sie sagt, es sey $t = \pm \sqrt{\left(\frac{S}{g}\right)}$, wodurch sie die zukünftige Zeit durch $+$, die vergangene durch $-$ bezeichnet, oder umgekehrt.

Aufgabe XXXI. (Fig. 29.)

Eine Glasröhre CALN, deren Länge = 60 Fuss, und welche unten verschlossen, oben offen ist, sey bis

zu der Höhe AB = $54\frac{6}{7}$ Fuss mit Queksilber, in dem Raum BN mit athmosphärischer Luft gefüllt. Sie werde umgedreht, und berühre mit der unteren Oeffnung die Oberfläche PQ eines mit Quecksilber gefüllten Gefässes. Man fragt, bis zu welcher Fntfernung von dem Punkte F das Quecksilber in der umgekehrten Röhre sinken werde.

Auflösung.

Das Quecksilber wird bis zu einem Punkte E sinken, dass der Druck der in der Röhre FEGA eingeschlossenen Luft, welche früher in dem Raume CBMN sich befand, und der Druck des Quecksilbers in der Röhre DG dem Drucke der athmosphärischen Luft, welcher dem Druck einer Quecksilbersäule von 28 Zoll gleich gesetzt werde, gleich ist. Nach dem Mariottischen Gesetze findet man, da die Luft in dem Raume CBMN durch die athmosphärische Luft mit einer Kraft, welche dem Drucke einer Quecksilbersäule von 28 Zoll gleich kam, gedrückt wurde, die Länge u der Quecksilbersäule, welche dem Drucke der in der Säule FEGA, deren Länge = z gesetzt werde, befindlichen Luft das Gleichgewicht hält, durch die Proportion

$$\left.\begin{matrix}60-54\frac{6}{7}\\ 5\frac{1}{7}\end{matrix}\right\}:z = u:28$$

$$\text{also } u = \frac{28.5\frac{1}{7}}{z}$$

$$= \frac{144}{z}$$

$$\text{mithin ist } \frac{144}{z}+60-z = 28$$

$$\text{folglich } 144+60z-z^2 = 28z$$

$$\text{somit } 144 = z^2 + (28 - 60)z$$
$$= z^2 - 32z$$

$$\text{demnach } \left.\begin{matrix} 144 + 16^2 \\ 144 + 256 \\ 400 \end{matrix}\right\} = (z - 16)^2$$

$$\text{also } \pm 20 = z - 16$$

$$\text{folglich } z = \pm 20 + 16$$
$$= \begin{Bmatrix} +36 \\ -4 \end{Bmatrix}.$$

Zusatz.

Der erste Werth von z beantwortet die Frage, wie lang die Luftröhre FE werde, damit der Druck derselben mit dem Drucke der Quecksilberröhre DE zusammengenommen dem Druck einer Quecksilberröhre von 28 Zoll das Gleichgewicht halte. Die Algebra giebt in jeder Gleichung, wie obige, auch die negativen Werthe der unbekannten Grösse an, welche der Gleichung Genüge leisten. Sie antwortet desshalb zugleich auf die Frage, wie lang die Luftröhre werde, damit der Ueberschuss des Druckes der Quecksilberröhre über den Druck der Luftröhre dem Druck einer Quecksilberröhre von 28″ das Gleichgewicht halte. Und sie setzt die Länge der Röhre DE=64, der Luftröhre = 4.

Aufgabe XXXII. (Fig. 30.)

Ein Dreieck zu beschreiben, dessen Grundlinie, Höhe und Schenkelsumme den gegebenen geraden Linien g, h, S, gleich seyen.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey BAC das gesuchte Dreieck, so liegt, wenn BC als der Lage nach gegeben angenommen wird, die Spitze A auf der, in einer Entfernung = h mit BC parallel gezogenen, geraden Linie AG. Beschreibt man aus A als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = AC, und verlängert BA bis zum Durchschnitte mit demselben in D, so ist $\left.\begin{matrix} BA + AD \\ BD \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = BA + AC \\ = S \end{matrix}$, also liegt D auf dem Umfange eines gegebenen, von dem Kreise, dessen Mittelpunkt in A ist, in D berührten Kreises. Legt man in den Kreis, dessen Mittelpunkt in A ist, die auf AG perpendikulare Sehne CF, so ist der Punkt F gegeben. Da nun dieser Kreis durch die gegebenen Punkte C, F lauft, und den anderen Kreis berührt, so lässt sich sein Mittelpunkt A finden. Mithin ist die Spitze A des gesuchten Dreieckes, somit das ganze Dreieck gegeben.

Construction.

Man mache BC = g, BCG = R, CG = h, GA ‡‡ BC, FG = GC, beschreibe durch F, C einen Kreis, welcher einen, aus B als Mittelpunkte mit einem Radius = S beschriebenen, Kreis berühre, und verbinde den auf der Linie AG liegenden Mittelpunkt desselben mit den Punkten B, C durch die geraden Linien BA, AC zusamen, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Determination.

Damit durch F, C ein, den Kreis, dessen Mittelpunkt in B liegt, berührender, Kreis gelegt werden könne, darf, da der Punkt C innerhalb desselben liegt, der Punkt

F nicht ausserhalb desselben liegen, also muss

$FG \overset{=}{<} GH$ seyn, wenn H den Durchschnitt der Linie CF mit dem grossen Kreise bezeichnet;

---

folglich $FC \overset{=}{<} CH$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} FC^2+CB^2 \\ 4h^2+g^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix} HC^2+CB^2 \\ BH^2 \\ S^2. \end{matrix}\right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \left.\begin{matrix} 4h^2+g^2 \\ FC^2+CB^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix} S^2 \\ BH^2 \\ HC^2+CB^2 \end{matrix}\right.$$

---

demnach $FC \overset{=}{<} HC$;

mithin liegt F innerhalb des grossen Kreises. Es lässt sich also ein Kreis durch die Punkte F, C legen, welcher den grossen Kreis berührt. Da der Mittelpunkt desselben auf der geraden Linie BD und auf der, die Sehne FC perpendikular halbirenden, geraden Linie AG, also in A liegt, so ist $DA = AC$

$$\text{folglich } BA+AC = BA+AD$$
$$= S.$$

Da auch $BC = g$, $GC = h$ ist, so hat $\triangle ABC$ die gegebenen Eigenschaften.

Zusatz.

Es erhellet von selbst, dass es, je nachdem $FG \overset{=}{<} GH$ ist, einen einzigen Kreis, oder zwey Kreise mit der Ei-

genschaft giebt, durch die Punkte F, C zu laufen, und den grossen Kreis zu berühren. dass man also auch ein Dreieck, oder zwey Dreiecke mit den gegebenen Eigenschaften erhält.

Algebraische Auflösung.

Setzt man BA=x, also AC=S—x, so ist $\frac{BA+AC+CB}{2}$ $=\frac{S+g}{2}$, $\frac{BA+AC-CB}{2}=\frac{S-g}{2}$, $\frac{CB+BA-AC}{2}=\frac{g+2x-S}{2}$, $\frac{AC+CB-BA}{2}=\frac{S+g-2x}{2}$,

$$\text{also } \left.\begin{matrix}\triangle ABC \\ \frac{g.h}{2}\end{matrix}\right\} = \surd\left(\frac{S+g}{2}.\frac{S-g}{2}.\frac{2x+g-S}{2}\;\frac{S+g-2x}{2}\right)$$

$$\text{folglich } \frac{g^2h^2}{4}=\frac{S^2-g^2}{4}\;\frac{2x(S+g)-4x^2+g^2-S^2-2x(g-S)}{4}$$

$$\text{mithin } \frac{4g^2h^2}{S^2-g^2}=2x(S+g-g+S)-4x^2+g^2-S^2$$

$$\text{somit } 4x^2-4S.x = g^2-S^2-\frac{4g^2h^2}{S^2-g^2}$$

$$\text{demnach } x^2-Sx+\tfrac{1}{4}S^2 = \tfrac{1}{4}S^2+\frac{g^2-S^2}{4}-\frac{g^2h^2}{S^2-g^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}g^2-\frac{g^2h^2}{S^2-g^2}$$

$$= g^2\left(\frac{\frac{1}{4}S^2-\frac{1}{4}g^2h^2}{S^2-g^2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}g^2\left(\frac{S^2-g^2-4h^2}{S^2-g^2}\right)$$

$$\text{also } x = \tfrac{1}{2}S \pm \tfrac{1}{2}g\sqrt{\left(\frac{S^2 - g^2 - 4h^2}{S^2 - g^2}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(S \pm g\sqrt{\left(\frac{S^2 - g^2 - 4h^2}{S^2 - g^2}\right)}\right)$$

Der Werth von x ist mithin ein doppelter, nämlich

$$x = \tfrac{1}{2}\left(S + g\sqrt{\left(\frac{S^2 - g^2 - 4h^2}{S^2 - g^2}\right)}\right)$$

$$x = \tfrac{1}{2}\left(S - g\sqrt{\left(\frac{S^2 - g^2 - 4h^2}{S^2 - g^2}\right)}\right).$$

Zusatz.

Da $S^2 - g^2 - 4h^2 < S^2 - g^2$, so ist

$$\frac{S^2 - g^2 - 4h^2}{S^2 - g^2} < 1$$

$$\text{folglich } \sqrt{\left(\frac{S^2 - g^2 - 4h^2}{S^2 - g^2}\right)} < 1$$

$$\text{somit } g\sqrt{\left(\frac{S^2 - g^2 - 4h^2}{S^2 - g^2}\right)} < g.$$

Nun ist $S > g$, also ist auch $S > g\sqrt{\left(\frac{S^2 - g^2 - 4h^2}{S^2 - g^2}\right)}$, mithin sind beide Werthe von x positiv. Da sie nichts anderes bezeichnen können, als die Linien BA, BA′, so unterscheidet also die Algebra zwischen den Linien BA, BA′ nicht durch die Zeichen + —, sondern sie versieht beide mit einerley Zeichen, und beide unterscheiden sich nur durch die absolute Grösse.

Zusatz 2.

Mit dem Vorstehenden stimmt das Resultat der Rechnung genau überein, wenn man BC in K halbirt, und $KE = y$ setzt.

Alsdann ist $BA^2 = BE^2 + EA^2$, $\quad AC^2 = CE^2 + EA^2$

$= (\tfrac{1}{2}g + y)^2 + h^2 \quad = (\tfrac{1}{2}g - y)^2 + h^2$

also hat man die Gleichung

$$S = \sqrt{((\tfrac{1}{2}g + y)^2 + h^2)} + \sqrt{((\tfrac{1}{2}g - y)^2 + h^2)}$$

folglich $S - \sqrt{((\tfrac{1}{2}g - y)^2 + h^2)} = \sqrt{((\tfrac{1}{2}g + y)^2 + h^2)}$

mithin $S^2 - 2S\sqrt{((\tfrac{1}{2}g - y)^2) + h^2)} + (\tfrac{1}{2}g - y)^2 = (\tfrac{1}{2}g + y)^2 + h^2$

somit $-2S((\tfrac{1}{2}g - y)^2 + h^2) = 2gy - S^2$

demnach $\left.\begin{matrix} 4S^2((\tfrac{1}{2}g - y)^2 + h^2) \\ 4S^2(\tfrac{1}{4}g^2 - gy + y^2 + h^2) \end{matrix}\right\} = 4g^2y^2 - 4gyS^2 + S^4$

also $\left.\begin{matrix} y^2(4S^2 - 4g^2) \\ 4y^2(S^2 - g^2) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} S^4 - S^2g^2 - 4S^2h^2 \\ S^2(S^2 - g^2 - 4h^2) \end{matrix}\right.$

folglich $y^2 = \dfrac{S^2(S^2 - g^2 - 4h^2)}{4(S^2 - g^2)}$

mithin $y = \pm \dfrac{\tfrac{1}{2}S\sqrt{S^2 - g^2 - 4h^2}}{S^2 - g^2}$.

Durch welche Werthe nichts anderes, als die beiden einander gleichen, aber in entgegengesetzter Richtung liegenden, durch die, von den Spitzen, A' auf die Grundlinie gefällten, Perpendikel bestimmten Segmente EK, E'K der Grundlinie, vom Halbirungspunkte an, bezeichnet seyn können, und wodurch also wiederum auf die Linien BA BA' hingewiesen wird.

Aufgabe XXXIII. (Fig. 31.)

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu beschreiben, dessen Hypotenuse und Flächenraum gegeben seyen, jene = der gegebenen geraden Linie S, dieser = dem Quadrate der gegebenen geraden Linie a.

Construction.

Man mache $BC = S$, $FC = a$, errichte in C auf BC ein Perpendikel, nehme $GC = CF$, ziehe FH $\#$ EG, HA $\#$ BC, und verknüpfe den Durchschnitt A der Linie HA und des über BC beschriebenen Halbkreises mit den Punkten B, C durch die geraden Linien BA, AC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Determination.

Damit HA dem Umfange begegne, muss

$$HC \leqq \tfrac{1}{2} BC \text{ seyn,}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}FC:CH\\ EC:CG\\ \tfrac{1}{2}BC:a\end{matrix}\right\} \geqq \left\{\begin{matrix}FC\\ a\end{matrix}\right\} : \tfrac{1}{2}BC$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix}\tfrac{1}{2}BC^2\\ CK^2\end{matrix}\right\} \geqq a^2$$

, wenn CK den Punkt C mit dem Endpunkte des in E auf BC perpendikularen Halbmessers verbindet;

$$\text{mithin } KC \geqq a.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } KC \geqq a \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } HC \leqq EK,$$

wie aus der Determination hervorgeht, folglich erreicht HA den Halbkreis in einem Punkte A.

Nun ist EC:CG = FC:CH

also $\left.\begin{matrix} EC.CH \\ \triangle ABC \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} CG^2 \\ a^2. \end{matrix}$

Zusatz.

Im Fall der Berührung des Kreises durch die Linie HA giebt es ein einziges, im Fall des Durchschnittes ein zweites Dreieck A'BC mit den gegebenen Eigenschaften, wie von selbst erhellet.

Algebraische Auflösung.

Bezeichnet man die Höhe AD des Dreieckes mit y, so muss y so bestimmt werden, dass

$$\tfrac{1}{2} S.y = a^2$$

$$\text{also } y = \frac{a^2}{\tfrac{1}{2}S} \text{ werde.}$$

Zusatz.

Die Algebra giebt nur Einen Werth für die Höhe, weil beide Dreiecke, welche das Verlangte leisten, dieselbe Höhe AD = A'D' haben.

Bezeichnet man aber CA mit x, also BA mit $\frac{2a^2}{x}$,

$$\text{so ist } x^2 + \frac{4a^4}{x^2} = S^2$$

$$\text{folglich } x^4 + 4a^4 = S^2x^2$$

$$\text{mithin } x^4 - S^2x^2 + \tfrac{1}{4}S^4 = \tfrac{1}{4}S^4 - 4a^4$$

$$\text{somit } x^2 = \tfrac{1}{2}S^2 \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}S^4 - 4a^4)}$$

$$\text{demnach } x = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}S^2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}S^4 - 4a^4})}$$

Der Werth von x ist also ein vierfacher, welche, je zwey u. zwey einander gleich, mit entgegengesetzten Zeichen versehen sind.

Es ist nämlich $x = +\sqrt{(\frac{1}{2}S^2+\sqrt{(\frac{1}{4}S^4-4a^4)})}$

$x = -\sqrt{(\frac{1}{2}S^2+\sqrt{(\frac{1}{4}S^4-4a^4)})}$

$x = +\sqrt{(\frac{1}{2}S^2-\sqrt{(\frac{1}{4}S^4-4a^4)})}$

$x = -\sqrt{(\frac{1}{2}S^2-\sqrt{(\frac{1}{4}S^4-4a^4)})}$

Die Werthe von BA sind $= \dfrac{2a^2}{\pm\sqrt{(\frac{1}{2}S^2\pm\sqrt{(\frac{1}{4}S^4-4a^4)})}}$

$= \dfrac{\pm 2a^2\sqrt{(\frac{1}{2}S^2\mp\sqrt{(\frac{1}{4}S^4-4a^4)})}}{\sqrt{(4a^4)}}$

$= \pm\sqrt{(\frac{1}{2}S^2\mp\sqrt{(\frac{1}{4}S^4-4a^4)})}$.

Der Werth von BA ist also auch ein vierfacher, welche Werthe je zwey und zwey einander gleich, aber mit entgegengesetzten Zeichen versehen sind. Es ist nämlich

$BA = +\sqrt{(\frac{1}{2}S^2-\sqrt{(\frac{1}{4}S^4-4a^4)})}$

$BA = -\sqrt{(\frac{1}{2}S^2-\sqrt{(\frac{1}{4}S^4-4a^4)})}$

$BA = +\sqrt{(\frac{1}{2}S^2+\sqrt{(\frac{1}{4}S^4-4a^4)})}$

$BA = -\sqrt{(\frac{1}{2}S^2+\sqrt{(\frac{1}{4}S^4-4a^4)})}$,

welche Werthe den Werthen von x je zwey und zwey gleich sind.

Die geometrische Construction giebt an die Hand, dass die positiven Werthe von x die Linien CA, CA′, die correspondirenden negativen die Linien CA″, CA‴, und dass die positiven Werthe von BA die Linie BA, BA′, die correspondirenden negativen die Linien B″A″, B″A‴ bezeichnen. Bezeichnet man nämlich die, der Linie CB gleiche und entgegengesetzt liegende, Linie B″C durch (—S), und die Kathete CA″ des rechtwinkligen Dreieckes A″B″C von dem Flächenraume = a^2 durch x, so findet sich $x^2 = \frac{1}{2}(-S)^2\pm\sqrt{(\frac{1}{4}(-S)^4-4a^4)}$

$= \frac{1}{2}S^2\pm\sqrt{(\frac{1}{4}S^4-4a^4)}$.

Derselbe Ausdruck involvirt also sowohl die Werthe von CA^2, als von CA'^2, und die Quadratwurzel aus demselben hat sowohl den Werth von CA, als den von CA′

anzugeben, welches die Algebra wegen der Entgegengesetztheit der Lage der Linien durch die Zeichen + — thut. Uebrigens unterscheidet die Algebra wiederum die von den Punkten B, B' auf verschiedenen Seiten einander parallel laufenden Linien BA, BA'', oder BA', B''A''' durch die Zeichen + —.

Diese Nachweisung der Bedeutung der Zeichen erhält ihre Bestätigung durch den algebraischen Ausdruck der Höhe des Dreieckes für den Fall der negativ gesetzten Hypotenuse. Alsdann nämlich ist die Höhe

$$= \frac{a^2}{-\frac{1}{2}S}$$

$$= -\frac{a^2}{\frac{1}{2}S},$$ welches mit der in Beziehung auf DA entgegengesetzt liegenden Linie A''D' übereinstimmt.

Aufgabe XXXIV. (Fig. 52.)

Ein Dreieck zu finden, in welchem die Grundlinie, Höhe und eine Seite den gegebenen geraden Linien g, h, b gleich seyen.

Construction.

Man nehme eine gerade Linie BC = g, errichte auf derselben das Perpendikel BG = h, lege GA' # BC, beschreibe aus C als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = b, welcher die Linie GA' in A' erreiche, und ziehe A'B, so ist A'BC das gesuchte Dreieck.

Determination.

Damit der Kreis die Linie A'G erreiche, muss

$$b \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \begin{cases} CK \\ h \end{cases} \text{seyn, (wenn } CA' = R).$$

Beweis.

$$\text{Es ist } b \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \begin{cases} h \\ CK, \end{cases}$$

also berührt, oder schneidet der Kreis die Linie GA'. Geschieht es in A', so ist BC=g, A'H=BG=h, wenn A HB=R, CA'=b, also hat das Dreieck die gegebenen Eigenschaften.

Zusatz.

Es erhellet von selbst, dass es im Fall der Berührung ein einziges, im Fall des Durchschnittes ein zweites Dreieck A''B C mit den gegebenen Eigenschaften giebt.

Berechnung.

Setzt man BA'=x, so ist

$$\begin{aligned} x^2 &= A'H^2+HB^2 \\ &= h^2+(g-CH)^2 \\ &= h^2+(g-(\pm\sqrt{(b^2-h^2)}))^2 \\ &= h^2+g^2\mp 2g\sqrt{(b^2-h^2)}+b^2-h^2 \\ &= g^2+b^2\mp 2g\sqrt{(b^2-h^2)} \end{aligned}$$

$$\text{also } x = \pm\sqrt{(g^2+b^2\mp 2g\sqrt{(b^2-h^2)})}.$$

Es hat mithin x vier je zwey und zwey einander gleiche, aber mit entgegengesetzten Zeichen versehene Werthe, nämlich

$$\begin{aligned} x &= +\sqrt{(g^2+b^2-2g\sqrt{(b^2-h^2)})} \\ x &= +\sqrt{(g^2+b^2+2g\sqrt{(b^2-h^2)})} \\ x &= -\sqrt{(g^2+b^2-2g\sqrt{(b^2-h^2)})} \\ x &= -\sqrt{(g^2+b^2+2g\sqrt{(b^2-h^2)})}. \end{aligned}$$

Die positiven Werthe sind offenbar dieselbigen, welche die geometrische Construction gegeben hat, nämlich BA', BA'', die negativen diejenigen, welche die geometrische Construction gegeben haben würde, wenn man BC'=g, BC'=h

gemacht, und aus C' als Mittelpnnkt einen Kreis mit einem Radius = b bis zum Durchschnitte mit der Linie G'A'''(#BC) beschrieben hätte. Es ändern sich auch die Werthe von x nicht, wenn in derselben — g statt + g, —b statt +b, —h statt +h gesetzt wird. Weil aber die dazu gehörigen Werthe von x die Linien BA'''', BA''' bezeichnen müssen, so belegt sie die Algebra mit dem Zeichen —.

Aufgabe XXXV. (Fig. 33.)

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu beschreiben, in welchem die Hypotenuse BC der gegebenen geraden Linie g, die Differenz der Katheten der gegebenen geraden Linie d gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey BAC das gesuchte Dreieck, so ist

$$\left.\begin{array}{l} BC^2-(BA-AC)^2:\triangle ABC \\ g^2 \quad - d^2 \quad : \frac{g.h}{2} \end{array}\right\} = 4:1$$

(Euklids Data von Wurm, Satz 67. Zus.) wenn die Höhe AH = h gesetzt wird;

$$\text{also } \left.\begin{array}{l} g^2-d^2 \\ (g+d)(g-d) \end{array}\right\} = 2gh$$

$$\text{folglich } 2g:g+d = g-d:h;$$

mithin ist h, somit das Dreieck gegeben.

Construction.

Man nehme BG = d, mache CB = C''B = g, richte in G auf GC ein Perpendikel GE auf, mache dasselbe = 2 G, beschreibe durch die Punkte C, C'', E einen das

Perpendikel GE in D schneidenden Kreis, lege durch D die Linie DA der Linie BC parallel, und beschreibe über BC einen die Linie AD in A erreichenden Halbkreis, so ist, wenn die geraden Linien BA, AC gezogen werden, ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis.

$$\text{Es ist}\quad \left.\begin{array}{r} g^2-d^2 \\ (g+d)(g-d) \\ CG.GC'' \\ \left.\begin{array}{r} EG \\ 2g \end{array}\right\} .\,GD \end{array}\right\} < \left\{\begin{array}{l} g^2 \\ 2g.\tfrac{1}{2}g \end{array}\right.$$

$$\text{also } GD < \tfrac{1}{2}g;$$

folglich erreicht die Linie DA den Kreis. Geschieht es in A, so ist

$$\left.\begin{array}{l} BC^2 \\ g^2 \end{array}\right\} - (BA - AC)^2 : \triangle ABC = 4 : 1$$

$$\text{mithin } g^2-(BA-AC)^2 : \left\{\begin{array}{l} 2\triangle ABC \\ g.DG \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 4 : 2 \\ = 2 : 1 \end{array}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} 2g.DG \\ EG.GD \\ CG.GC'' \\ g^2-d^2 \end{array}\right\} : g.DG$$

$$\text{somit } BA - AC = d.$$

Zusatz 1.

Für den zweiten Durchschnitt A' ist

$$\left.\begin{array}{l} BC^2 \\ g^2 \end{array}\right\} - (CA' - A'B)^2 : \left\{\begin{array}{l} 2\triangle A'BC \\ g.DG \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 2 : 1 \\ = \left\{\begin{array}{l} 2g.DG \\ g^2-d^2 \end{array}\right\} : g.DG \end{array}$$

$$\text{folglich } CA' - A'B = d.$$

Zusatz 2.

Macht man auch $E'G = 2g$, und beschreibt einen Kreis durch die Punkte C, E', C'', welcher GE in D' schneide, legt die Linie D'A'' der Linie BC parallel, beschreibt über BC'' einen die Linie A''D in den Punkten A'', A''' erreichenden Kreis, und zieht die Linien BA'', C''A'', BA''', C''A''', so sind, wie von selbst erhellet, auch die Dreiecke, B A''C'', B A'''C'' von der gegebenen Eigenschaft.

Algebr. Auflösung.

Man halbire BC in O, fälle auf BC das Perpendikel AH, und setze $OH = y$, so ist

$$BH = \tfrac{1}{2}g + y, \qquad CH = \tfrac{1}{2}g - y$$

$$\text{also } BA^2 = g(\tfrac{1}{2}g + y), \qquad CA^2 = g(\tfrac{1}{2}g - y)$$

$$\text{folglich } BA = \pm\sqrt{(g(\tfrac{1}{2}g + y))}, \quad CA = \pm\sqrt{(g(\tfrac{1}{2}g - y))}$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix}BA - AC\\ d\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{(g(\tfrac{1}{2}g + y))} \mp \sqrt{(g(\tfrac{1}{2}g - y))}$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix}(d \pm \sqrt{(g(\tfrac{1}{2}g - y))})^2\\ d^2 \pm 2d\sqrt{(g(\tfrac{1}{2}g - y))} + \tfrac{1}{2}g^2 - gy\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}g(\tfrac{1}{2}g + y)\\ \tfrac{1}{2}g^2 + gy\end{matrix}\right.$$

$$\text{demnach } \pm 2d\sqrt{(g(\tfrac{1}{2}g - y))} = 2gy - d^2$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}4d^2(\tfrac{1}{2}g^2 - gy)\\ 2d^2g^2 - 4d^2y\end{matrix}\right\} = 4g^2y^2 - 4gd^2y + d^4$$

$$\text{folglich } \frac{(2g^2 - d^2)d^2}{4g^2} = y^2$$

$$\text{mithin } y = \pm\frac{d}{2g}\sqrt{(2g^2 - d^2)}.$$

Es hat also, in Uebereinstimmung mit der geometrischen Construction, y zwey einander gleiche, durch die

Zeichen + — sich unterscheidende Werthe, welche die Geometrie in entgegengesetzter Richtung construirt.

Bestimmt man aus y die Werthe von BA, CA, so ist

$$BA^2 = g(\tfrac{1}{2}g \pm \frac{d}{2g}\sqrt{(2g^2-d^2)}), \qquad CA^2 = g(\tfrac{1}{2}g \mp \frac{d}{2g}\sqrt{(2g^2-d^2)}).$$

$$= \tfrac{1}{2}g^2 \pm \tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)} \qquad = \tfrac{1}{2}g^2 \mp \tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)}.$$

$$\text{also } BA = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 \pm \tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)})},$$
$$CA = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 \mp \tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)})}.$$

$$\text{oder } BA = \pm\frac{\sqrt{(2g^2-d^2 \pm d)}}{2}$$
$$CA = \pm\frac{\sqrt{(2g^2-d^2 \mp d)}}{2}.$$

Es haben also die Linien BA, CA vier Werthe,

$$\text{nämlich } BA = +\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2+\tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)})}$$
$$BA = +\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2-\tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)})}$$
$$BA = -\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2+\tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)})}$$
$$BA = -\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2-\tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)})}$$

$$CA = +\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2-\tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)})}$$
$$CA = +\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2+\tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)})}$$
$$CA = -\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2-\tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)})}$$
$$CA = -\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2+\tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)})}.$$

$$\text{Oder } BA = +\frac{\sqrt{(2g^2-d^2)}+d}{2} \qquad CA = +\frac{\sqrt{(2g^2-d^2)}-d}{2}$$

$$BA = +\frac{\sqrt{(2g^2-d^2)}-d}{2} \qquad CA = +\frac{\sqrt{(2g^2-d^2)}+d}{2}$$

$$BA = -\frac{\sqrt{(2g^2-d^2)+d)}}{2} \qquad CA = -\frac{\sqrt{(2g^2-d^2-d)}}{2}$$

$$BA = -\frac{\sqrt{(2g^2-d^2)}-d}{2} \qquad CA = -\frac{\sqrt{(2g^2-d^2+d)}}{2}$$

Die positiven Werthe von BA, AC, wozu die ersten Paare gehören, beziehen sich offenbar auf die Linien BA, BA′, CA, CA′, die negativen auf die oben dargelegten Linien BA″, BA‴, C″A″, C′A‴. Es bestätigt sich also hier wieder, dass die Geometrie in entgegengesetzter Lage die Linien construirt, welche die Algebra durch die Zeichen + — unterscheidet, und dass eine Linie, wie C″A″, oder C″A‴ in Beziehung auf die ihr parallelen AC, oder A′C mit dem Zeichen — versehen wird.

Anmerkung 1.

Setzt man BA $= x$, AC $= y$, und $x - y = d$, $x^2 + y^2 = g^2$,

$$\text{also } x - d = y$$

$$\text{so ist } \left.\begin{matrix} x^2 + (x-d)^2 \\ 2x^2 - 2dx + d^2 \end{matrix}\right\} = g^2$$

$$\text{also } x^2 - dx = \frac{g^2 - d^2}{2}$$

$$\text{folglich } \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 = \frac{g^2 - d^2}{2} + \tfrac{1}{4} d^2$$

$$= \frac{2g^2 - d^2}{4}$$

$$\text{mithin } x = \frac{d}{2} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(2g^2 - d^2)}$$

$$= \frac{d \pm \sqrt{(2g^2 - d^2)}}{2}$$

$$\text{somit } y = \frac{-d \pm \sqrt{(2g^2 - d^2)}}{2}.$$

Man erhält also für x, y nur zwey Werthe, welche oben mit dem ersten und letzten von BA, CA übereinstimmen, und die Werthe von BA, BA‴ für x, von

CA und C″A‴ für y andeuten. Dass in diesem Falle nur zwey Werthe für x, y gefunden werden, rührt daher, dass die Aufgabe in einem beschränkteren Sinne gefasst wurde, als sie gegeben war, und die Geometrie sie behandelt. Bey der ersten Berechnungsart nämlich kann x sowohl kleiner, als grösser als y, also x—y sowohl = +d als = —d seyn, so wie in der geometrischen Fassung BA die grössere, oder die kleinere Kathete seyn kann, der Unterschied beider aber = d bleibt. In der zweiten Rechnung wird x als das grössere bezeichnet; und dann zeigt die Algebra von den vier Werthen, welche für x möglich sind, nur den ersten und letzten an, wovon jener der grössere positive, dieser der kleinere negative, oder mit dem positiven verglichen, der grössere ist. Dadurch dass der zweite dieser Werthe von x negativ ist, zeigt die Algebra an, dass er einem der vier möglichen Werthe von x, welche die Aufgabe in ihrer Allgemeinheit auflösen, entgegengesetzt liegt, wie BA″ der Linie BA′ entgegengesetzt ist, nicht aber, dass sie gerade dem ersten dieser Werthe entgegengesetzt sey.

Anmerkung 2.

Bezeichnet man den Werth von BA durch x, von AC durch x—d, und setzt

$$\left.\begin{array}{r} x^2+(x-d)^2 \\ x^2+x^2-2dx+d^2 \end{array}\right\} = g^2$$

$$\text{so ist } x^2-dx = \frac{g^2-d^2}{2}$$

$$\text{also } x^2-dx+\tfrac{1}{4}d^2 = \tfrac{1}{2}g^2-\tfrac{1}{4}d^2$$

$$= \frac{2g^2-d^2}{4}$$

$$\text{folglich } x = \tfrac{1}{2}d \pm \tfrac{1}{2}\surd(2g^2 - d^2)$$

$$\text{mithin } x - d = -\tfrac{1}{2}d \pm \tfrac{1}{2}\surd(2g^2 - d^2).$$

Es könnte überraschen, dass also BA, AC nur zwey Werthe erhalten, wovon überdies der eine positiv, der andere negativ ist. Und man könnte versucht werden, dafür zu halten, dass der positive Werth von $\left\{\begin{matrix} x \\ x-d \end{matrix}\right\}$ die Linie $\left\{\begin{matrix} BA \\ CA \end{matrix}\right\}$, der negative die Linie $\left\{\begin{matrix} BA' \\ CA' \end{matrix}\right\}$ bezeichne. Aber man würde darin irren. Durch jene Gleichung $x^2 + (x-d)^2 = g^2$ wird die Bedingung ausgedrückt, dass die von B auslaufende Linie des gesuchten rechtwinkligen Dreieckes um d grösser sey, als die andere, während durch die in Anmerkung 1. gegebene Auflösung die allgemeinere Aufgabe behandelt wird, ein rechtwinkeliges Dreieck zu beschreiben, in welchem der Unterschied der Katheten = d sey. Diese Aufgabe lässt die oben angegebenen vier Werthe für die Katheten zu, die beschränktere nur zwey, und die darin bezeichneten Werthe sind nicht BA, BA′, und CA, CA′, sondern BA, BA‴, und CA, C″A‴. Es ist nämlich

$$+\tfrac{1}{2}d\surd(2g^2 - d^2) = +\tfrac{1}{2}d\surd(2g^2 - d^2)$$

$$\text{also } \tfrac{1}{2}g^2 + \tfrac{1}{2}d\surd(2g^2-d^2) = \left\{\begin{matrix} \tfrac{1}{4}d^2 + \tfrac{1}{2}d\surd(2g^2-d^2) + \left\{\begin{matrix} \tfrac{1}{2}g^2 - \tfrac{1}{4}d^2 \\ \tfrac{1}{4}(2g^2-d^2) \end{matrix}\right. \\ (\tfrac{1}{2}d \pm \tfrac{1}{2}\surd(2g^2-d^2))^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } +\surd(\tfrac{1}{2}g^2 + \tfrac{1}{2}d\surd(2g^2-d^2)) = +\tfrac{1}{2}d + \tfrac{1}{2}\surd(2g^2-d^2).$$

$$\text{Eben so ist } -\tfrac{1}{2}d\surd(2g^2 - d^2) = -\tfrac{1}{2}d\surd(2g^2 - d)$$

$$\text{also } \tfrac{1}{2}g^2 - \tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)} = \tfrac{1}{4}d^2 - \tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)} + \begin{cases} \tfrac{1}{2}g^2 - \tfrac{1}{4}d^2 \\ \tfrac{1}{2}(2g^2-d^2) \end{cases}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}\right)^2$$

$$\text{folglich } -\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}g^2 - \tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)}\right)} = \tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}.$$

Da nämlich links die negative Wurzel genommen wird, muss sie auch rechts genommen werden, und die ist $\tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}$.

Sollte die Aufgabe auf dem hier angegebenen Wege in der Allgemeinheit, wie in Anmerk. 1., aufgelöset werden, so müsste man setzen

$$x^2 + (x \mp d)^2 = g^2$$

$$\text{also } 2x^2 \mp 2dx + d^2 = g^2$$

$$\text{folglich } x^2 \mp dx = \frac{g^2 - d^2}{2}$$

$$\text{mithin } x^2 \mp dx + \tfrac{1}{4}d^2 = \frac{g^2}{2} - \tfrac{1}{4}d^2$$

$$= \frac{2g^2 - d^2}{4}$$

$$\text{somit } x = \pm\tfrac{1}{2}d \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}.$$

Es würde demnach x vier Werthe erhalten,

$$x = +\tfrac{1}{2}d + \tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}$$
$$x = +\tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}d + \tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)},$$

welche mit den in Anmerkung 1. erhaltenen genau übereinstimmen.

Anmerkung 3.

Dieselbe Bewandtniss hat es mit der Aufgabe: ein

rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Hypotenuse und Kathetensumme gegeben seyen.

Aufgabe XXXVI. (Fig. 34.)

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu finden, dessen Hypotenuse der gegebenen geraden Linie g, und Flächenraum der Hälfte des Quadrates der gegebenen geraden Linie f gleich sey.

Algebraische Auflösung.

Bezeichnet man die Katheten mit x, y, so muss seyn $xy = f^2$, $x^2 + y^2 = g^2$

$$\text{also } y = \frac{f^2}{x}$$

$$\text{folglich } x^2 + \frac{f^4}{x^2} = g^2$$

$$\text{mithin } x^4 + f^4 = g^2 x^2$$

$$\text{somit } x^4 - g^2 x^2 = -f^4$$

$$\text{demnach } x^4 - g^2 x^2 + \tfrac{1}{4} g^4 = \tfrac{1}{4} g^4 - f^4$$

$$\text{also } x^2 = \tfrac{1}{2} g^2 \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} g^4 - f^4)}$$

$$\text{folgl. } x = \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2} g^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4} g^4 - f^4)})},\ y^2 = g^2 - \tfrac{1}{2} g^2 \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4} g^4 - f^4)}$$

$$\text{mithin } y = \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2} g^2 \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4} g^4 - f^4)})}.$$

Zusatz 1.

Es ergeben sich also vier Werthe sowohl für x, als für y. Es ist nämlich

$$x = +\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = +\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)};$$
$$x = +\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = +\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)}$$
$$x = -\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = -\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)}$$
$$x = -\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = -\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)}$$

$$y = +\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = +\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)}$$
$$y = +\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = +\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)}$$
$$y = -\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = -\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)}$$
$$y = -\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = -\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)}.$$

Zusatz 2.

Damit die Werthe von x, y reell werden, muss

$$\tfrac{1}{4}g^4 \geqq f^4$$

$$\text{also } \tfrac{1}{2}g^2 \geqq f^2,$$

$$\text{folglich } g^2 \geqq 2f^2 \text{ seyn.}$$

Zusatz 3.

Von den Werthen von x und von y sind die beiden ersten positiv, die beiden letzten negativ. Die ersten Werthe von x, y sind den dritten, die zweiten Werthe den vierten derselben Grössen, dem absoluten Werthe nach, gleich. Der $\left\{\begin{matrix}\text{erste}\\ \text{zweite}\\ \text{dritte}\\ \text{vierte}\end{matrix}\right\}$ Werth von x ist dem $\left\{\begin{matrix}\text{zweiten}\\ \text{ersten}\\ \text{vierten}\\ \text{dritten}\end{matrix}\right\}$ von y gleich.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte, so ist

$$\left.\begin{matrix} BC.AD \\ g.AD \end{matrix}\right\} = f^2 \quad \left.\begin{matrix} AB.CD \\ g.CD \end{matrix}\right\} = f^2$$

also $g:f = f:CD$;

folglich ist CD der Grösse nach gegeben. Ist nun BC auch der Lage nach gegeben, so liegt der Punkt C auf einer, in gegebener Entfernung der geraden Linie AB parallel laufenden, Linie. Da er auch auf dem Umfange des über AB beschriebenen Halbkreises liegt, so ist er gegeben, somit $\triangle ABC$ gegeben.

Construction.

Von einer gegebenen, oder willkührlich angenommenen, geraden Linie schneide man $AB = g$ ab, beschreibe über AB einen Halbkreis, richte in A auf AB ein Perpendikel auf, beschreibe aus A als Mittelpunkte mit einem Radius $= f$ einen Kreis, welcher die Linie AB und jenes Perpendikel in H, K schneide, ziehe die gerade Linie BK, lege derselben die gerade Linie HE, welche dem Perpendikel in E begegne, parallel, ziehe durch den Punkt E die Linie EC parallel mit AB, und verbinde den Punkt C, in welchem die Linie EC dem Umfange jenes Halbkreises begegnet, mit den Punkten A, B durch die geraden Linien AC, CB, so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Determination.

Damit EC dem Umfange des Halbkreises begegne,

muss $AE \overset{=}{<} \frac{1}{2} AB$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}HA:AE\\BA:AK\end{matrix}\right\} \genfrac{}{}{0pt}{}{=}{>} HA:{}^{1}/_{2}AB$$

$$\text{folglich } {}^{1}/_{2}BA^{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{=}{>} \left\{\begin{matrix}HA.AK\\f^{2}.\end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix}BA^{2}\\g^{2}\end{matrix}\right\} \genfrac{}{}{0pt}{}{=}{>} 2f^{2} \text{ seyn.}$$

Beweis.

Es ist $g^{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{=}{>} 2f^{2}$

also $AE \genfrac{}{}{0pt}{}{=}{>} {}^{1}/_{2}AB$, wie aus der Determination hervorgehet; mithin erreicht die Linie EC den Halbreis in einem Punkte C, und es ist $AB = g$, $ACB = R$, und $AB.CD = AB.CE$, wenn $CDA = R$,

$$= HA.AK$$
$$= f^{2};$$

also hat $\triangle ABC$ die gegebenen Eigenschaften.

Zusatz 1.

Man erhält ein Dreieck, oder zwey Dreiecke mit den gegebenen Eigenschaften, je nachdem $g^{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{=}{>} 2f^{2}$, also je nachdem die Linie EC den Halbkreis berührt, oder schneidet.

Zusatz 2.

Da AB auf der einen und auf der anderen Seite des Punktes $A = g$ genommen werden kann, so giebt es zwey, oder vier Dreiecke mit der gegebenen Eigenschaft.

Zusatz 3.

Die Linien AC′ und AC″, AC‴ und AC⁗ sind einander gleich und liegen in einer geraden Linie. Die Linien BC′ und BC″, BC‴ und BC⁗ sind einander gleich, und parallel.

Zusatz 4.

Die Algebra sieht das Quadrat von g als gegeben an, und nimmt also die gegebene Hypotenuse als positiv, oder negativ in Rechnung. Sie statuirt auch negative Werthe von x, y, weil nur die Quadrate dieser Werthe und ihr Produkt in den Gleichungen vorkommen, welche sich nicht änderen, wenn x und y negativ gesetzt werden, wie fern es nur von beiden zugleich geschieht.

Zusatz 5.

Die positiven Werthe von x deuten auf die Linien AC′, AC‴, die negativen auf AC″, AC⁗, die positiven Werthe von y auf BC′, BC‴, die negativen auf B′C″, B′C⁗ hin.

Zusatz 6.

Linien, welche, wie BC′, B′C″, oder wie BC‴, B′C⁗ einander gleich und parallel auf verschiedenen Seiten einer geraden Linie liegen, werden durch die Zeichen + — unterschieden.

Zusatz 7.

Dreiecke, wie ABC′, AB′C″, welche einander congruent sind, und um zwey Verticalwinkel, wie BAC′, B′AC″ liegen, werden nicht durch die Zeichen + — unterschieden.

Aufgabe XXXVII. (Fig. 35.)

Ein Dreieck zu beschreiben, dessen Winkel der Spitze dem gegebenen Winkel α, Umfang der gegebenen Linie S, und Flächenraum dem Quadrate der gegebenen Linie a gleich sey.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, so ist, wenn auf der Verlängerung von BA die Linie AL = AC gemacht, die gerade Linie CL gezogen, und das Perpendikel AE auf dieselbe gefällt wird, (vermöge Eucl. Data von Wurm Satz 67.)

$$\left.\begin{array}{c}(BA+AC)^2-BC^2\\(BA+AC+CB)(BA+AC-CB)\\ \\ BA+AC-CB\end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{c}\triangle ABC\\a^2\\ \frac{a^2}{BA+AC+CB}\\ \frac{a^2}{S}\\ p\end{array}\right\} = 4LE:EA$$

wenn $S:a = a:p$;

also ist BA + AC — CB gegeben. Da auch BA + AC + CB = S gegeben ist, so ist sowohl BA + AC, als BC gegeben, die Aufgabe also auf die Construction eines Dreieckes reducirt, dessen Grundlinie, Schenkelsumme und Winkel der Spitze gegeben sind.

Construction.

Man bestimme p durch die Proportion $S:a = a:p$, BA+AC-CB durch die Proportion AE:4LE = p:BA+AC-CB, leite daraus und aus dem Werthe von BA + AC-CB = S die Werthe von BA + AC, CB her, beschreibe über BC

einen Kreisabschnitt, welcher einen Winkel $= \alpha$ fasst, richte in dem Halbirungspunkte F von BC ein Perpendikel FG auf, welches den Umfang in G schneide, und beschreibe aus G als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius=GB, und aus B als Mittelpunkt einen anderen Kreis mit einem Radius = BA+AC, welcher den zuletzt beschriebenen Umfang in L erreiche, so ist, wenn die, den Kreisbogen BGC in A schneidende, gerade Linie BL gezogen, und der Punkt A mit dem Punkte C durch die gerade Linie BC verknüpft wird, ABC das gesuchte Dreieck.

D e t e r m i n a t i o n.

Damit der aus B als Mittelpunkte beschriebene Kreis den aus G als Mittelpunkte beschriebenen erreiche, muss $BA+AC \leqq BH$ seyn, wenn $BH = 2\,BG$ ist.

$$\text{Es ist } BA+AC-CB : \frac{a^2}{S} = 4\,LE:EA$$
$$= 4 : \tan.\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\text{also } BA+AC-CB = \frac{4\,a^2}{S.\tan.\frac{1}{2}\alpha},$$

$$\text{Auch ist } BA+AC+CB = S$$

$$\text{folglich } BA+AC = {}^1/_2 S + \frac{2\,a^2}{S.\tan.{}^1/_2\alpha},\quad BC = {}^1/_2 S \quad \frac{2\,a^2}{S.\tan.{}^1/_2\alpha}$$
$$= \frac{{}^1/_2 S^2\tan.{}^1/_2\alpha + 2\,a^2}{S\tan.{}^1/_2\alpha},\quad = \frac{{}^1/_2 S^2\tan.{}^1/_2\alpha - 2a^2}{S\tan.{}^1/_2\alpha}$$
$$= \frac{S^2\tan.{}^1/_2\alpha + 4\,a^2}{2\,S\tan.{}^1/_2\alpha},\quad = \frac{S\tan.{}^1/_2\alpha - 4\,a^2}{S.\tan.{}^1/_2\alpha}.$$

$$\text{Ferner ist } \left.\begin{matrix} CB \\ \dfrac{S^2\tan.{}^1/_2\alpha - 4\,a^2}{S.\tan.{}^1/_2.\alpha} \end{matrix}\right\} : BH = \sin.{}^1/_2\alpha : 1$$

$$\text{mithin } BH = \frac{S^2 \tan.\tfrac{1}{2}\alpha - 4a^2}{S\tan.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.\tfrac{1}{2}\alpha};$$

demnach muss seyn

$$\frac{S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha + 4a^2}{2S\tan.\tfrac{1}{2}\alpha} \underset{<}{=} \frac{S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha - 4a^2}{2S.\tan.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{somit } S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.\tfrac{1}{2}\alpha + 4a^2\sin.\tfrac{1}{2}\alpha \underset{<}{=} S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha - 4a^2$$

$$\text{also } 4a^2(1+\sin.\tfrac{1}{2}\alpha) \underset{<}{=} S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha(1-\sin.\tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$\text{folglich } 4a^2 : S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha \underset{<}{=} 1-\sin.\tfrac{1}{2}\alpha : (1-\sin.\tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$\text{mithin } 4a^2 : S^2 = \tan.\tfrac{1}{2}\alpha : \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1+\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}{1-\sin.\tfrac{1}{2}\alpha} \\ (\tan.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha))^2. \end{array}\right.$$

Der Beweis ergiebt sich von selbst.

Zusatz.

Auch erhellet leicht, dass es im Fall der Berührung der Kreise, welche B und G zu Mittelpunkten haben, ein einziges, im Fall des Durchschneidens ein zweites Dreieck A'BC mit den gegebenen Eigenschaften giebt.

Anmerkung 1.

Um den Winkel ABC = B zu berechnen, hat man

$$\begin{aligned} CB:BL &= \sin.BLC:\sin.BCL \\ &= \sin.\tfrac{1}{2}\alpha:\sin.(\tfrac{1}{2}\alpha+B) \\ &= \sin.\tfrac{1}{2}\alpha:\sin.\tfrac{1}{2}\alpha.\cos.B+\cos.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B \\ &= 1:\cos.B+\cot.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B \\ &= 1:\sqrt{(1-\sin B^2)}+\cot.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B \end{aligned}$$

also $\sqrt{(1-\overline{\sin.B}^2)}+\cot.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B = \frac{BL}{BC}$

folglich $\sqrt{(1-\overline{\sin.B}^2)} = \frac{BL}{BC} - \cot.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B$

mithin $1-\overline{\sin.B}^2 = \frac{BL^2}{BC^2} - 2\frac{BL}{BC}\cot.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B + \overline{\cot.\tfrac{1}{2}\alpha}^2.\overline{\sin.B}^2$

somit $1-\frac{BL^2}{BC^2} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\sin.B}^2(1+\overline{\cot.\frac{1}{2}\alpha}^2) \\ \overline{\sin.B}^2.\overline{\operatorname{cosec}.\frac{1}{2}\alpha}^2 \\ \frac{(\sin.B)^2}{(\sin.\frac{1}{2}\alpha)^2} \end{array} \right\} - 2\frac{BL}{BC}\cot.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B$

demnach

$$\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2 - \frac{BL^2}{BC^2}\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2 = \overline{\sin.B}^2 - 2\frac{BL}{BC}\sin.\tfrac{1}{2}\alpha.\cos.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B$$

also

$$\left. \begin{array}{c} \overline{\sin.\frac{1}{2}\alpha}^2 - \frac{BL^2}{BC^2}\overline{\sin.\frac{1}{2}\alpha}^2 + \frac{BL^2}{BC^2}\overline{\sin.\frac{1}{2}\alpha}^2.\overline{\cos.\frac{1}{2}\alpha}^2 \\ \overline{\sin.\frac{1}{2}\alpha}^2\left(1-\frac{BL^2}{BC^2}+\frac{BL^2}{BC^2}\overline{\cos.\frac{1}{2}\alpha}^2\right) \\ \overline{\sin.\frac{1}{2}\alpha}^2\left(1-\frac{BL^2}{BC^2}\left(1-\overline{\cos.\frac{1}{2}\alpha}^2\right)\right) \\ \overline{\sin.\frac{1}{2}\alpha}^2\left(1-\frac{BL^2}{BC^2}\overline{\sin.\frac{1}{2}\alpha}^2\right) \end{array} \right\} = \left(\sin.B - \frac{BL}{BC}.\sin.\tfrac{1}{2}\alpha.\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\right)$$

folglich

$$\sin.B = \frac{BL}{BC}\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\cos.\tfrac{1}{2}\alpha \pm \sin.\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\left(1-\frac{BL^2}{BC^2}\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2\right)}$$

$$= \sin.\tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{BL}{BC}\cos.\tfrac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{\left(1-\frac{BL^2}{BC^2}\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2\right)}\right)$$

$$=\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha\ 4\alpha^2}\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{1-\left(\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4\alpha^2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2}\right)$$

Die Möglichkeit der Auflösung hangt davon ab, dass

$$1 \overset{=}{>} \frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\sin.\tfrac{1}{2}\alpha$$

mithin $1:\sin.\frac{1}{2}\alpha \overset{=}{>} S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2:S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2$

somit $1+\sin.\frac{1}{2}\alpha:1-\sin.\frac{1}{2}\alpha \overset{=}{<} S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha:4a^2$,

welches mit der oben gefundenen Determination übereinstimmt.

Da auch $S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2 > S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2$

so ist $\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2} > 1$

also $\left(\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\right)^2(\overline{\cos.\frac{1}{2}\alpha}^2+\overline{\sin.\frac{1}{2}\alpha}^2) > 1$

folglich

$$\left(\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2 > 1-\left(\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2$$

mithin

$$\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\cos.\tfrac{1}{2}\alpha > \sqrt{\left(1-\left(\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2\right)}$$

somit

$$\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\cos.\tfrac{1}{2}\alpha-\sqrt{1-\left(\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2} > 0$$

demnach $\sin.B > 0$.

Die Werthe von sin. B sind also beide positiv; und es werden ohne Zweifel dadurch zunächst die spitzen Winkel ABC, A'BC angedeutet.

Uebrigens erhellet daraus, wie wichtig es ist, bey solchen Rechnungen nicht den einen Werth der gesuchten Grösse ausser Acht zu lassen.

Anmerkung 2.

Bekanntlich aber gehören zu jedem Sinus zwey Winkel, welche einander zu 2R ergänzen. Es liegen also in den beiden Werthen von sin. B eigentlich die Andeutungen von vier Winkeln, nämlich von den genannten spitzen Winkeln ABC, A'BC, und von ihren Supplementen KBC, MBC, wodurch zwey den Dreiecken ABC, A'BC congruente Dreiecke A"BC, A'"BC angedeutet werden, welche man geometrisch auch findet, wenn die Construction in der gehörigen Allgemeinheit gefasst, und sowohl auf der einen, als der anderen Seite von BC Kreisabschnitte beschrieben werden, welche des Winkels α fähig sind.

Aufgabe XXXVIII. (Fig. 36.)

Ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten den gegebenen geraden Linien a, b, c gleich sind, wovon je zwey zusammen genommen grösser sind, als die dritte.

Auflösung.

Man beschreibe aus den Endpunkten B, C der Linie AB, welche der einen, z. E. der Linie a, gleich sey, Kreise mit Radien, welche den Linien b, c gleich sind, und verbinde den Durchschnittspunkt A derselben mit

den Punkten B, C. durch die geraden Linien AB, AC, so ist, wie von selbst erhellet, ABC das gesuchte Dreieck.

Zusatz.

Da die Kreise einander zweimal schneiden, so giebt es ein zweites Dreieck A'BC mit den gegebenen Eigenschaften.

Anmerkung 1.

Drückt man den Inhalt des Dreieckes aus den Seiten a, b, c durch Rechnung aus, so ist, wenn $a+b+c = S$ gesetzt wird, $\triangle ABC = \pm \sqrt{(\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-a)(\frac{1}{2}S-b)(\frac{1}{2}S-c))}$. Da der doppelte Werth des Flächeninhaltes nichts anderes, als die, auf geometrischem Wege gefundenen, Dreiecke ABC, A'BC andeuten kann, so bezeichnet also die Algebra von zwey einander gleichen, in der Art, wie $\triangle ABC$, und $\triangle A'BC$, entgegengesetzt liegenden Dreiecken das eine durch $-$, wenn das andere durch $+$ bezeichnet wird.

Dasselbe stimmt mit dem überein, was die Berechnung der Höhe an die Hand giebt. Es ist nämlich die Höhe des Dreieckes, dessen Seiten durch a, b, c bezeichnet werden, $= \pm \frac{\sqrt{(\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-a)(\frac{1}{2}S-b)(\frac{1}{2}S-c))}}{\frac{1}{2}a}$, welcher doppelte Werth nur die Höhen AD, A'D bezeichnen kann, und ein Dreieck, welches durch das negative Zeichen von dem Dreieck ABC unterschieden wird, erscheint in Beziehung auf dieses in einer Lage, wie das Dreieck A'BC.

Anmerkung 2.

Es ist der Ausdruck für $\sin.ACB = \pm \frac{2}{ab}\triangle ABC$. Da durch den doppelten Werth desselben nichts anderes

angedeutet werden kann, als die Winkel ACB, A'CB, so unterscheidet also die Algebra die Sinus der gleichen Winkel, welche eine entgegengesetzte Lage haben, wie ACB, A'CB, durch die Zeichen + —.

Was die stumpfen Winkel betrifft, welchen dieselben Sinus, wie den spitzen Winkeln zukommen, so sind sie ohne Zweifel die Winkel BCE, BCE', welche die Winkel BCA, BCA' zu 2 R ergänzen, und welche zu zwey anderen Dreiecken BCE, BCE' führen, deren an BC liegende Seiten CE, CE' gleich b genommen werden.

Da nämlich $\left.\begin{array}{r} BCE \\ 2R - MCE \end{array}\right\} = 2R - BCA,$

so ist MCE = BCA, also das Perpendikel EM = AD, mithin $\triangle BCE = \triangle BCA$

also auch $\sin.BCE = \frac{2}{ab} \triangle ABC.$

Es ist also $\frac{2}{ab} \triangle ABC$ sowohl der Sinus des Winkels BCE, als des Winkels BCA. Und das deutet die Rechnung dadurch an, dass sie zwey einander zu 2 R ergänzende Winkel als diejenigen anweiset, welche demselben Sinus zugehören. Eben so ist es mit sin. BCE'. Die Algebra antwortet mithin durch den Ausdruck $\sin.ABC = \pm \frac{2}{ab} \triangle ABC$ in erschöpfender Allgemeinheit auf die Frage, wie gross der Sinus des von zwey, der Grösse nach gegebenen, Seiten eines Dreieckes, dessen Inhalt gegeben ist, eingeschlossenen, der dritten Seite gegenüberliegenden Winkels sey, und sie weiset durch das doppelte Zeichen, und die Doppelheit der Winkel, welche demselben Sinus zugehören, die vier Winkel BCA,

BCA', BCE, BCE', welche durch die gegebenen Seiten a, b, c bestimmt werden, und die vier Dreiecke ABC, A'BC, ECB, E'CB an.

Anmerkung 5.

Eine Bestätigung davon liegt in dem Ausdrucke für die Hälfte des Winkels, dessen Sinus $= \pm \frac{2}{ab} \triangle ABC$ ist. Für irgend einen Winkel C ist nämlich

$$\sin.C = 2.\sin.\tfrac{1}{2}C.\cos.\tfrac{1}{2}C$$

$$\text{also } \frac{\sin.C}{2\cos.\frac{1}{2}C} = \sin.\tfrac{1}{2}C$$

$$\text{mithin } \sin.\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin.C}{\pm 2\sqrt{(1-\overline{\sin.\frac{1}{2}C}^2)}}$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} 4\overline{\sin.\frac{1}{2}C}^2(1-\overline{\sin.\frac{1}{2}C}^4) \\ 4\overline{\sin.\frac{1}{2}C}^2 - 4\overline{\sin.\frac{1}{2}C}^4 \end{matrix}\right\} = \overline{\sin.C}^2$$

$$\text{demnach } \overline{\sin.\tfrac{1}{2}C}^4 - \overline{\sin.\tfrac{1}{2}C}^2 = -\tfrac{1}{4}\overline{\sin.C}^2$$

$$\text{also } \overline{\sin.\tfrac{1}{2}C}^4 - \overline{\sin.\tfrac{1}{2}C}^2 + \tfrac{1}{4} = \frac{1-\overline{\sin.C}^2}{4}$$

$$= \frac{\overline{\cos.C}^2}{4}$$

$$\text{folglich } \overline{\sin.\tfrac{1}{2}C}^2 = +\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\cos.C$$

$$= \frac{1 \pm \cos.C}{2}$$

$$\text{mithin } \sin.\tfrac{1}{2}C = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \cos.C}{2}}.$$

Es hat demnach $\sin.\frac{1}{2}ACB$ folgende vier Werthe:

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = +\sqrt{\frac{1+\cos.C}{2}}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = -\sqrt{\frac{1+\cos.C}{2}}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = +\sqrt{\frac{1-\cos.C}{2}}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = -\sqrt{\frac{1-\cos.C}{2}}.$$

Da die analytische Trigonometrie lehrt, dass $\sin.\tfrac{1}{2}ACB = \pm\sqrt{\frac{1-\cos.ACB}{2}}$, so sind die beiden letzteren jener Werthe die Sinus von den Winkeln ACB, A'CB. Und da $\sin.\tfrac{1}{2}ECB = \pm\sqrt{\frac{1-\cos.ECB}{2}}$, aber $\cos.ECB = -\cos.ACB$, so ist $\sin.\tfrac{1}{2}ECB = \pm\sqrt{\frac{1+\cos.ACB}{2}}$, mithin deuten die beiden ersteren jener Werthe die Sinus der Winkel ECB, E'CB an.

Aufgabe XXXIX. (Fig. 37.)

Durch den innerhalb des gegebenen Winkels ABC gegebenen Punkt D eine gerade Linie zwischen die Schenkel AB, BC zu legen, welche ein Dreieck ABC von ausgezeichnetem Werthe bestimme.

Auflösung.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, so ist, wenn DG der AB parallel gezogen ist, und die Perpendikel AF, DE auf BC gefällt werden,

$$\left.\begin{matrix} BC:CG \\ x:x-a \end{matrix}\right\} = AC:CD$$ wenn $BC = x$, $BG = a$ gesetzt wird;

$$= AF:\left\{\begin{matrix} DE \\ b \end{matrix}\right\}$$ wenn man $DE = b$ setzt;

$$= \left\{\begin{matrix} AF.BC \\ 2y \end{matrix}\right\}:b.x$$, wenn man $\triangle ABC = y$ setzt;

$$= y:\frac{bx}{2}$$

$$\text{also } y = \frac{1/2\, bx^2}{x-a}$$

$$\text{folglich } \frac{dy}{dx} = \frac{(x-a)bx - 1/2\, bx^2}{(x-a)^2}$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} bx(x-a) - 1/2\, bx^2 \\ bx(x-a-1/2\, x) \\ bx(1/2\, x - a) \end{matrix}\right\} = 0$$

demnach $x = 0$, oder $1/2\, x - a = 0$

somit $x = 2a$.

$$\text{Für } x = 0 \text{ ist } y = -\frac{0}{a}$$

$$= -0.$$

$$\text{Für } x = 2a \text{ ist } y = \frac{2ba^2}{a}$$

$$= 2ab.$$

$$\text{Ferner ist } \frac{dy}{dx} = \frac{1/2\, bx^2 - abx}{(x-a)^2}$$

$$\text{also } \frac{d^2.y}{(dx)^2} = \frac{(x-a)^2(bx-ab)-(\frac{1}{2}bx^2-abx)2(x-a)}{(x-a)^4}$$

$$= \frac{b(x-a)^2-2(\frac{1}{2}bx^2-abx)}{(x-a)^3}$$

$$= \frac{ba^2}{(x-a)^3}$$

$$\text{folglich } \frac{d^2.y}{(dx)^2} = \frac{ba^2}{-a^3} = -\frac{b}{a} \text{ für } x = 0;$$

$$= \frac{ba^2}{a^3} = +\frac{b}{a} \text{ für } x = 2a.$$

Es ist mithin der Werth von y ein $\left\{ \begin{matrix} \text{grösster} \\ \text{kleinster} \end{matrix} \right\}$ für $x = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 2a \end{matrix} \right\}$.

Die Bedeutung des letzteren ist für sich klar. Was den ersteren betrifft, so ist, wenn man

$x = +0{,}1.a$, oder $x = -0{,}1.a$ setzt,

$$y = \frac{\frac{1}{2}b.0{,}01.a^2}{0{,}1.a-a}, \qquad y = \frac{\frac{1}{2}b.0{,}01.a^2}{-\frac{11}{10}.a}$$

$$= -\frac{0{,}01.ab}{\frac{18}{10}} \qquad = -\frac{0{,}01.ab}{\frac{22}{10}}$$

$$= -\tfrac{1}{180}ab \qquad = -\tfrac{1}{220}ab.$$

Es ist also y wirklich ein grösstes, wenn $x = 0$ gesetzt wird.

Zusatz 1.

Hieraus erhellet wieder, dass man nicht einen Werth der Wurzel einer Gleichung als bedeutungslos wegzuwerfen hat.

Zusatz 2.

Ein Dreieck A'BC', welches in dem Nebenwinkel des Winkels ABC liegt, heisst in Beziehung auf das Dreieck ABC ein negatives.

Aufgabe XL. (Fig. 38.)

Die dritte Seite AC eines Dreieckes ABC aus den beiden übrigen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel auszudrücken.

Auflösung.

Es ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB.BC.\cos ABC$

also $AC = \pm\sqrt{(AB^2 + BC^2 - AB.BC.\cos.ABC)}$

Zusatz.

Es hat die dritte Seite zwey gleiche, durch die Zeichen $+ -$ von einander unterschiedene, Werthe. Nimmt man auf den Verlängerungen von CB, AB über B hinaus die Linien C'B, A'B den Linien CB, AB gleich, welche Linien in Beziehung auf BC, BA durch $-BC$, $-BA$ ausgedrückt werden, und zieht man A'C', so ist

$$A'C'^2 = A'B^2 + BC'^2 - 2\,A'B.BC'.\cos.A'CB$$
$$= (-AB)^2 + (-BC)^2 - 2(-AB)(-BC)\cos.A'CB$$
$$= AB^2 + BC^2 - 2\,AB.BC.\cos.ACB,$$

also ist $AB^2 + BC^2 - 2\,AB.BC.\cos.ACB$ sowohl dem Quadrate von AC, als dem Quadrate xon A'C' gleich, und die Quadratwurzel jenes Ausdruckes sowohl die Bezeichnung für AC, als für A'C', und die Verschiedenheit der Zeichen deutet die Verschiedenheit der Lage dieser Linien an.

Aufgabe XLI. (Fig. 38.)

Auf einer gegebenen geraden Linie BC = b, als Grundlinie, ein Dreieck BAC zu beschreiben, dessen Schenkel BA, AC in dem gegebenen Verhältnisse p:q stehen, und dessen Winkel der Spitze einem gegebenen Winkel *α* gleich sey.

Auflösung.

Setzt man BA = x, also AC = $\frac{q}{p}$x, weil BA : $\left\{ \begin{matrix} AC \\ x \end{matrix} \right\}$ = p : q, so muss $b^2 = x^2 + \frac{q^2}{p^2}x^2 - 2\frac{q}{p}x^2 \cos.\alpha$ seyn,

$$= \frac{p^2 + q^2 - 2pq\cos.\alpha}{p^2}x^2$$

$$\text{also } x^2 = \frac{p^2}{p^2 + q^2 - 2pq\cos.\alpha}b^2$$

$$\text{folglich } x = \pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{p^2 + q^2 - 2pq\cos\alpha}b^2\right)}.$$

Anmerkung.

Nimmt man BC′ = −b, und berechnet ein Dreieck, welches BC′ zur Grundlinie, ein Schenkelverhältniss = p:q, den Winkel der Spitze = *α* habe, und setzt man BA′ = x, also A′C′ = $\frac{q}{p}$x, so ist

$$\left.\begin{matrix} (-b)^2 \\ b^2 \end{matrix}\right\} = x^2 + \frac{q^2}{p^2}x^2 - 2\frac{q}{p}x^2\cos.\alpha$$

$$= \frac{x^2(p^2 + q^2 - 2pq\cos.\alpha)}{p^2}$$

$$\text{also } x^2 = \frac{p^2}{p^2+q^2-2pq\cos.\alpha}\,b^2.$$

Da $\frac{p^2}{p^2+q^2-2pq\cos.\alpha}\,b^2$ sowohl dem Quadrate von BA, als dem von BA' gleich ist, und beide entgegengesetzte Lage haben, so giebt die Algebra beide an, indem sie setzt $x = \pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{p^2+q^2-2pq\cos.\alpha}\,b^2\right)}$. Man vergleiche Carnot Géom. de Position. pag. 40.

Aufgabe XLII. (Fig. 39.).

Den Mittelpunkt und den Radius des Kreises zu bestimmen, welcher die Seiten eines Dreieckes berühre, dessen Seiten den gegebenen Linien a, b, c gleich seyen.

Auflösung.

Man halbire die an einer Seite, z. E. BC, liegenden Winkel ABC, ACB, durch die geraden Linien DB, DC, und fälle aus dem Durchschnitte D derselben das Perpendikel DE auf BC, so ist D der Mittelpunkt, und DE der Radius des Kreises, welcher die gegebene Eigenschaft hat.

Der Beweis ergiebt sich von selbst.

Zusatz.

Da die Geometrie zwey Dreiecke ABC, A'BC construirt, deren Seiten den gegebenen Linien a, b, c gleich sind, so liegt in obiger Construction auch die Anweisung, den zweiten Radius D'E zu finden, welcher die Seiten des Dreieckes A'BC berührt.

Anmerkung.

Zur algebraischen Bestimmung des Radius aus den Seiten des Dreieckes, dessen Seiten den Linien a, b, c gleich sind, dient die Gleichung, $2\triangle ABC = (BC + CA + AB)DE$, oder, wenn der Radius mit r, und der Umfang mit S bezeichnet werden,

$$\pm 2\sqrt{(\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S - a)(\tfrac{1}{2}S - b)\tfrac{1}{2}(S - c)} = S.r$$

$$\text{also } r = \pm \frac{2\sqrt{(\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S - a)(\tfrac{1}{2}S - b)(\tfrac{1}{2}S - c))}}{S},$$

wodurch nichts weiter angedeutet werden kann, als die, beiden entgegengesetzt liegenden, einander gleichen Radien DE, D'E.

Aufgabe XLIII. (Fig. 40.)

Den Mittelpunkt und den Radius des Kreises zu bestimmen, welcher eine Seite eines Dreieckes, dessen Seiten den gegebenen Linien a, b, c gleich sind, und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten berühre.

Auflösung.

Man halbire die Nebenwinkel der Winkel, welche an einer Seite, z. E. BC, liegen, durch die geraden Linien FB, FC, und fälle aus dem Durchschnitte derselben ein Perpendikel FG auf BC, so ist F der Mittelpunkt, und FG der Radius des gesuchten Kreises; wie von selbst erhellet.

Anmerkung.

Zur algebraischen Bestimmung des Radius R dienet die Gleichung,

$$\left.\begin{array}{r} 2\,\triangle\,ABC \\ \text{oder} \pm 2\sqrt{(\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S-a)(\tfrac{1}{2}S-b)(\tfrac{1}{2}S-c))} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} (BA+AC-BC)FG \\ (BA+AC-BC)R \end{array}\right.$$

$$\text{also } R = \pm\frac{2\sqrt{(\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S-a)(\tfrac{1}{2}S-b)(\tfrac{1}{2}S-c))}}{c+b-a},$$

wodurch, neben dem, durch das Zeichen + behafteten Radius FG, der, durch das Zeichen − angedeutete, Radius F'G bezeichnet wird, welcher die Seite BC des Dreieckes A'BC und die Verlängerungen der Seiten A'B, A'C berührt.

Aufgabe XLIV. (Fig. 41.)

Um das gegebene Dreieck ABC einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung.

Man halbire zwey Seiten, z. E. BA, AC, und richte in den Halbirungspunkten E, F Perpendikel ED, DF auf diesen Linien auf. Der Durchschnittspunkt D derselben ist der Mittelpunkt, und dessen Entfernung von einem Winkelpunkte, z. E. DA, der Radius des gesuchten Kreises, wie von selbst erhellet.

Anmerkung 1.

Zur algebraischen Bestimmung dienet die Gleichung,

$$\left.\begin{array}{r} BA.AC \\ \\ c.b \\ \\ \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 2\,DA.AH, \text{ wenn die Höhe durch } AH \\ \qquad\qquad \text{vorgestellt wird;} \\ 2\,r.h, \text{ wenn } BA=c,\ AC=b,\ AD= \\ \qquad\qquad r,\ AH=h \text{ gesetzt wird;} \end{array}\right.$$

$$\text{also ist } r = \frac{b.c}{2h}.$$

Es ist aber, wenn man BC mit a, den Umfang mit S bezeichnet, $h = \pm \frac{2\sqrt{(\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-a)(\frac{1}{2}S-b)(\frac{1}{2}S-c))}}{a}$

$$\text{folglich } r = \pm \frac{abc}{4\sqrt{(\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-a)(\frac{1}{2}S-b)(\frac{1}{2}S-c))}}.$$

Beschreibt man das Dreieck A'B C, dessen Seiten auch gleich a, b, c sind, so ist der Radius des, um dasselbe beschriebenen, Kreises zwar der Grösse nach mit AD einerley, aber nicht der Lage nach entgegengesetzt, mithin dürfte nicht der es seyn, welcher durch den negativen Werth von r bezeichnet wird.

Macht man C'A = AC, B'A = AB, zieht B'C', und bezeichnet diese Linien, weil sie eine den Linien CA, AB, BC des Dreieckes ABC entgegengesetzte Lage haben, durch —b, —c, —a, und sucht den Radius D'A des, um das Dreieck A B'C' beschriebenen, Kreises, wie er sich aus den Linien a, b, c ausdrücken lässt, so wird man zu setzen haben

$$AD' = \pm \frac{(-a)(-b)(-c)}{4\sqrt{(-{}^1/_2 S(-\frac{1}{2}S+a)(-\frac{1}{2}S+b)(-\frac{1}{2}S+c)}}$$

$$= \mp \frac{abc}{4\sqrt{(\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-a)(\frac{1}{2}S-b)(\frac{1}{2}S-c))}}.$$

Es schliesst sonach derselbe Ausdruck die Werthe von AD und von AD' in sich, und es wird ohne Zweifel durch jenen negativen Werth von r nichts anderes, als AD', angedeutet, welche Linie, wie aus der geometrischen Betrachtung erhellet, der Linie AD nicht nur gleich ist, sondern auch eine entgegengesetzte Lage hat. Zugleich erhellet daraus, dass dieses Beispiel Carnot in seiner

Géométrie de Position psg. 37. nicht dienen kann, um zu beweisen, dass die negativen Wurzeln einer Gleichung oft nichts bedeuteten.

Uebrigens ist der Inhalt des Dreickes AB'C' ein positiver, weil derselbe durch $\frac{(-a)(-h)}{2}$ ausgedrückt wird, wenn man die Höhe AH des Dreieckes ABC durch h bezeichnet. Ein Dreieck also, welches in Beziehung auf das Dreieck ABC eine Lage hat, wie das Dreieck AB'C', heisst nicht ein negatives, wenn jenes positiv gesetzt wird.

Anmerkung 2.

Da der Inhalt des Dreieckes $AB'C' = \frac{(-b)(-c)\sin.B'AC'}{2}$

$$= \frac{bc.\sin.B'AC'}{2},$$

so ist sin. B'AC' positiv. Die Sinus zweyer Scheitelwinkel haben also einerley Vorzeichen.

Aufgabe XLV. (Fig. 42.).

Ein rechtwinkeliges Dreieck BAC zu beschreiben, dessen Hypotenuse BC der gegebenen geraden Linie a, und dessen Summe der Kathetensumme BA + AC und des Perpendikels AK, von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällt, der gegebenen geraden Linie b gleich sey.

Analysis.

Es sey ABC das verlangte Dreieck, AK = x, so ist

$BA + AC = b - x$, also (Dat. 67.)

$$(b-x)^2 - a^2 : \left\{ \begin{matrix} \triangle ABC \\ \frac{ax}{2} \end{matrix} \right\} = 4 : 1$$

$$\text{also } \left. \begin{matrix} (b-x)^2 - a^2 \\ (b+a-x)(b-a-x) \end{matrix} \right\} = 2ax.$$

Macht man $DC = b$, $CB = CE = a$, setzt man auch $DG = x$, so ist $b + a - x = EG$, $b - a - x = BG$

$$\text{also } EC.GB = EB.DG$$

$$\text{folglich } DG : GE = GB : BE$$

$$\text{mithin } \left. \begin{matrix} DG + GE \\ DE \end{matrix} \right\} : GE = \left\{ \begin{matrix} GB + BE \\ EG \end{matrix} \right\} : BE$$

$$\text{somit } EG^2 = DE.EB;$$

demnach ist EG, also DG, mithin $\triangle ABC$ gegeben.

Construction.

Man mache $DC = b$, $BC = CE = a$, beschreibe über DE einen Halbkreis, errichte auf DE das Perpendikel BF, verknüpfe den Durchschnitt F desselben mit dem Kreisumfange durch die gerade Linie EF mit dem Punkte E, und beschreibe aus E als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $= EF$, welcher der Linie DB in G begegne, errichte auf DE das Perpendikel $DH = DG$, lege durch H die Linie HA der Linie DE parallel, beschreibe über BC einen Halbkreis, welcher der Linie HA in A begegne, und ziehe die geraden Linien BA, AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination.

Damit der Halbkreis über BC der Linie AH be-

gegne, muss

$$\left.\begin{array}{r} DH \\ DG \\ DE-EF \\ DE-\sqrt{(DE.EB)} \\ b+a-\sqrt{(2a(a+b))} \end{array}\right\} \overset{=}{<} \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} BC \\ \frac{a}{2} \end{array}\right.$$

seyn.

folglich $b+\frac{1}{2}a \overset{=}{<} \sqrt{(2a(a+b))}$

mithin $b^2+ab+\frac{1}{4}a^2 \overset{=}{<} 2ab+2a^2$

somit $b^2-ab+\frac{1}{4}a^2 \overset{=}{<} 2a^2$

demnach $b-\frac{1}{2}a \overset{=}{<} a\sqrt{2}$

$$\text{also } b \overset{=}{<} \left\{\begin{array}{l} a(\sqrt{2}+\frac{1}{2}) \\ a\frac{2\sqrt{2}+1}{2} \\ a\frac{2,828+1}{2} \\ a.1,914. \end{array}\right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } b \overset{=}{<} \left\{\begin{array}{l} 1,914.a \\ a(\sqrt{2}+\frac{1}{2}) \end{array}\right.$$

also $b-\frac{1}{2}a \overset{=}{<} a\sqrt{2}$

folglich $b^2-ab+\frac{1}{4}a^2 \overset{=}{<} 2a^2$

$$\text{mithin } b^2+ab+\frac{1}{4}a^2 \overset{=}{<} \left\{\begin{array}{l} 2a^2+2ab \\ 2a(a+b) \end{array}\right.$$

$$\text{somit } b + \tfrac{1}{2}a \overset{=}{<} \sqrt{(2a(a+b))}$$

$$\text{demnach } b + a - \sqrt{(2a(a+b))} \left\} \overset{=}{<} \right\{ \begin{matrix} \tfrac{1}{2}a \\ \tfrac{1}{2}BC, \end{matrix}$$

folglich erreicht der Kreis die Linie AH in einem Punkte A, so dass

$$(BA + AC)^2 - BC^2 : \triangle ABC = 4 : 1$$

$$\begin{aligned} \text{also } (BA + AC)^2 - a^2 &= 2a.AK \\ &= EB.DG. \end{aligned}$$

$$\text{Da } EG^2 = DE.EB$$

$$\text{so ist } DE:EG = GE:EB$$

$$\text{folglich } DG:GE = GB:BE$$

$$\text{mithin } EB.DG = EG.GB$$

$$\begin{aligned} \text{somit } (BA + AC)^2 - a^2 &= EG.GB \\ &= (DC + CE - DG)(DC - CE - DG) \\ &= CG^2 - \left\{ \begin{matrix} EC^2 \\ a^2 \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{demnach } BA + AC = CG$$

$$\begin{aligned} \text{also } BA + AC + AK &= CG + \left\{ \begin{matrix} HD \\ DG \end{matrix} \right. \\ &= CD \\ &= b. \end{aligned}$$

Zusatz 1.

Es giebt, je nachdem $b + a - \sqrt{(2a(a+b))} \overset{=}{<} \tfrac{1}{2}a$ ein einziges, oder ein zweites Dreieck mit den gegebenen Eigenschaften, wie von selbst erhellet.

Zusatz 2.

Nimmt man auch den zweiten Durchschnitt G′ des Kreises, welcher E zum Mittelpunkte hat, mit der verlängerten BE, und errichtet ein Perpendikel DH′ = DG′ auf DE, zieht auch eine gerade Linie durch H′ der Linie BE parallel, so kann dieselbe dem über BC beschriebenen Halbkreise nicht begegnen, weil DH′(= DG′) > DE, also noch viel mehr DH′ > ½ BC, folglich lässt sich kein Dreieck mit den gegebenen Eigenschaften, dessen Höhe = DG′, finden.

Algebraische Auflösung.

Aus der, in der Analysis enthaltenen, Gleichung, welche sagt, dass $(b-x)^2-a^2 = 2ax$ sey, folgt, dass

$$b^2-2bx+x^2-2ax = a^2$$

$$\text{also } x^2-2(a+b)x) = a^2-b^2$$

$$\text{folglich } (x-(a+b))^2 = a^2-b^2+a^2+2ab+b^2$$

$$= 2a^2+2ab$$

$$= 2a(a+b)$$

mithin $x = a+b \pm \sqrt{(2a(a+b))}$ sey, wodurch offenbar die Linien DG, DG′ angedeutet werden.

Zusatz.

Es hat x zwey reelle Werthe. Damit das Dreieck aber wirklich construirt werden könne, muss für den unteren Werth

$$a+b-\sqrt{(2a(a+b))} \ \overset{=}{<} \ \tfrac{1}{2}a \text{ seyn,}$$

$$\text{also } b+\tfrac{1}{2}a \ \overset{=}{<} \ \sqrt{(2a(a+b))}$$

folglich $b^2+ab+\frac{1}{4}a^2 \leqq 2a^2+2ab$

mithin $b^2-ab+\frac{1}{4}a^2 \leqq 2a^2$

somit $b \leqq \begin{cases} \frac{1}{2}a+a\sqrt{2} \\ 1{,}914.a. \end{cases}$

Für den obern müsste seyn

$a+b+\sqrt{(2a(a+b))} \leqq \frac{1}{2}a$

also $\frac{1}{2}a+b+\sqrt{(2a(a+b))} \leqq 0$,

welches niemals statt findet.

Beide Werthe von x sind zwar unter allen Umständen reell, der untere bestimmt aber nur unter der Bedingung ein Dreieck, dass $b \leqq 1{,}914.a$ sey. Der obere bestimmt gar kein Dreieck. Sind also gleich die Höhen dieser Dreiecke angeblich, so sind doch die Dreiecke imaginär.

Anmerkung.

Carnot führt in seiner Géométrie de Position p. 61. diese Aufgabe als ein Beispiel an, dass die Algebra zuweilen eine reelle positive Wurzel liefere, welche eine falsche Auflösung gewähre. Dazu berechtiget aber dieselbe keinesweges. Der Werth der Höhe ist kein falscher. Die Höhe ist eine wirkliche angebliche, das Dreieck aber kann ungeachtet der reellen Grundlinie und der reellen Höhe nicht construirt werden, weil zur Construction auch noch die Katheten gehören. und diese in dem vorliegenden Falle durch imaginäre Ausdrücke dargestellt werden, wovon man sich leicht überzeugen kann. Und es

ist der obere Werth von x ebenso wenig ein falscher, als der untere es ist, wenn $b > 1,914.a$ gesetzt wird.

Diese Ansicht findet in Folgendem ihre Bestätigung.

Sind A, B die Mittelpunkte zweyer gegebenen Kreise, deren Radien durch R, r bezeichnet werden mögen, so sind, wenn AB die Abscissenlinie und A der Anfangspunkt der Abscissen ist, die Gleichungen der Kreise folgende, $x^2+y^2=R^2$, $(x-\alpha)^2+y^2=r^2$. In einem Punkte, welchen sie gemeinschaftlich haben, sind die Coordinaten der Kreise einander gleich. Also darf man, wenn beide Gleichungen verbunden werden, die mit gleichen Coefficienten versehenen Werthe von x, y in einen Ausdruck vereinigen. Zieht man beide Gleichungen von einander ab, so erhält man $2\alpha x-\alpha^2 = R^2-r^2$, also für die Abscisse x des gemeinschaftlichen Punktes ist $x = \frac{R^2-r^2}{2\alpha} + \frac{1}{2}\alpha$. Ein Ausdruck, welcher für jeden beliebigen Werth der Grössen R, r, α reell ist, und gefunden werden kann. Man würde aber sehr irren, wenn man glauben wollte, dass also zwey Kreise unter allen Umständen einen Punkt gemeinschaftlich hätten. Es kommt nämlich auch noch darauf an, dass die Ordinate unter allen Umständen durch einen reellen Ausdruck dargesellt werde. Es ist aber

$$\begin{aligned}
y^2 &= R^2-x^2 \\
&= R^2-\left(\frac{R^2-r^2+\alpha^2}{2\alpha}\right)^2 \\
&= \frac{4\alpha^2R^2-(R^2-r^2+\alpha^2)^2}{4\alpha^2} \\
&= \frac{(2\alpha R+R^2-r^2+\alpha^2)(2\alpha R-R^2+r^2-\alpha^2)}{4\alpha^2} \\
&= \frac{((R+\alpha)^2-r^2)(r^2-(R-\alpha)^2)}{4\alpha^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(R+\alpha+r)(R+\alpha-r)(r+R-\alpha)(r-R+\alpha)}{4\alpha^2}.$$

Ist $R > r$, so sind die ersten Factoren des Zählers positiv. Wenn nun aber $R+r < \alpha$, so ist der dritte Factor negativ. Und weil ebenfalls $R-r < \alpha$, so ist der vierte Factor positiv, also der Werth von y imaginär.

Auch ist $r < \alpha - R$, wenn $R+r<\alpha$ ist;

$$\text{also } r^2 < \begin{cases}(\alpha-R)^2\\ \alpha^2-2\alpha R+R^2\end{cases}$$

$$\text{folglich } 2\alpha R < R^2-r^2+\alpha^2$$

$$\text{mithin } R < \begin{cases}\dfrac{R^2-r^2+\alpha^2}{2\alpha}.\\ x\end{cases}$$

Eben so ist $\alpha - r > R$, wenn $R+r < \alpha$ ist;

$$\text{also } \alpha^2-2\alpha r+r^2 > R^2$$

$$\text{folglich } \alpha^2-2\alpha r > R^2-r^2$$

$$\text{mithin } 2\alpha^2-2\alpha r > R^2-r^2+\alpha^2$$

$$\text{somit } \alpha-r > \begin{cases}\dfrac{R^2-r^2+\alpha^2}{2\alpha}\\ x;\end{cases}$$

demnach fällt der Endpunkt von x zwischen die Punkte, in welchen die Kreise die Abscissenlinie schneiden.

Wäre $r+\alpha<R$, so ist der vierte Factor negativ. Da aber nun auch $\alpha < R+r$, so ist der dritte Factor positiv, mithin wieder der Werth von y imaginär. Zeigt also gleich die Algebra eine reelle Abscisse des Durchschnittspunktes, so ist dadurch noch nicht angezeigt, dass es einen wirklichen Durchschnitt gebe. Es ist jene Ab-

scisse die reelle Abscisse eines imaginären Durchschnittes, gleichwie jene Höhe die reelle Höhe eines imaginären Dreieckes war.

Ganz ähnliches findet sich in den beiden folgenden Aufgaben.

Aufgabe LXVI.

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu beschreiben, dessen Umfang der gegebenen geraden Linie U, und Flächenraum dem Quadrate der gegebenen geraden Linie F gleich sey.

Algebraische Auflösung.

Bezeichnet man die Hypotenuse mit z, so ist, zufolge Eucl. Data. Satz 67.,

$$\left.\begin{array}{l}(U-z)^2-z^2\\ U^2-2Uz\end{array}\right\} = 4F^2$$

$$\text{also } U^2-4F^2 = 2Uz$$

$$\text{folglich } \frac{U^2-4F^2}{2U} = z;$$

mithin hat z einen einzigen reellen, und, so lange $U^2 > 4F^2$, oder $U > 2F$ ist, positiven Werth.

Bezeichnet man die Katheten mit x, y, so ist

$$x^2+y^2 = z^2, \quad xy = 2F^2$$

$$\text{also } 2xy = 4F^2$$

$$\text{mithin } (x+y) = z^2+4F^2, \qquad (x-y)^2 = z^2-4F^2.$$

Damit die Werthe von x, y nicht imaginär werden,

$$\text{muss } z^2 \geqq 4F^2 \text{ seyn};$$

$$\text{folglich } z \atop \frac{U^2-4F^2}{2U} \Bigg\} \geqq 2F$$

$$\text{somit } U^2 - 4F^2 \geqq 4UF$$

$$\text{demnach } U^2 - 4UF + 4F^2 \geqq 8F^2$$

$$\text{also } U \geqq \begin{cases} 2F + 2F.\sqrt{2} \\ 2F(\sqrt{2}+1) \\ 2F(1{,}414+1) \\ 2F(2{,}414) \\ 4{,}828.F. \end{cases}$$

So lange nun $U > 2F$, aber $U < 4{,}828\,F$ wird zwar die Hypotenuse reell und positiv, aber die Katheten werden imaginär, das Dreieck also wird imaginär. Gleichwie die Geometrie die Hypotenuse wirklich construirt, die Katheten aber auch nur unter der Bedingung construiren kann, dass $U \geqq 2F(\sqrt{2}+1)$, so weiset die Algebra eine wirkliche Hypotenuse an, verlangt aber zur Berechnung der Katheten noch als weitere Bedingung, dass $U \geqq 2F(\sqrt{2}+1)$.

Aufgabe XLVII.

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu bestimmen, dessen Umfang und Perpendikel, von der Spitze des rechten

Winkels auf die Hypotenuse gefällt, den gegebenen geraden Linien U, h gleich seyen.

Algebraische Auflösung.

Bezeichnet man die Hypotenuse mit z, so muss (vermöge Dat. 67.)

$$\left.\begin{matrix}(U-z)^2-z^2\\ U^2-2Uz\end{matrix}\right\} = 2hz \text{ werden,}$$

$$\text{also } U^2 = 2(U+h)z$$

$$\text{folglich } z = \frac{U^2}{2(U+h)}.$$

Es ist also z an keine Bedingung geknüpft, und es kann der Werth der Hypotenuse unter allen Umständen gefunden werden. Aber daraus folgt noch nicht, dass das Dreieck construirt werden könne. Bezeichnet man nämlich die Katheten mit x, y, so muss seyn

$$x^2+y^2 = z^2, \quad xy = h.z$$

$$\text{also } 2xy = 2hz$$

$$\text{folglich } x^2+2xy+y^2 = z^2+2hz, \quad x^2-2xy+y^2 = z^2-2hz$$

$$\text{mithin } x+y = \pm\sqrt{(z^2+2hz)}, \quad x-y = \pm\sqrt{(z^2-2hz)}.$$

Damit die Werthe von x, y reell werden,

$$\text{muss } z^2 \begin{matrix}=\\>\end{matrix} 2hz \text{ seyn,}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}z\\ \dfrac{U^2}{2(U+h)}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}=\\>\end{matrix} 2h$$

$$\text{folglich } U^2 \begin{matrix}=\\>\end{matrix} \left\{\begin{matrix}4(U+h)h\\ 4Uh+4h^2\end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{l} U^2 - 4hU + 4h^2 \\ (U-2h)^2 \end{array}\right\} \overset{=}{>} 8h^2$$

$$\text{somit } U - 2h \overset{=}{>} 2h\sqrt{2}$$

$$\text{demnach } U \overset{=}{>} 2h(\sqrt{2}+1)$$
$$\overset{=}{>} 2h(2{,}414)$$
$$\overset{=}{>} 4{,}828.h.$$

Wäre also $U < 4{,}828.h$; so hört zwar die Hypotenuse nicht auf, einen reellen Werth zu haben, aber die Katheten werden imaginär, und das Dreieck kann nicht construirt werden.

Aufgabe XLVIII. (Fig. 43. a. b.)

Durch einen gegebenen Winkelpunkt A eines gegebenen Quadrates ABCD eine gerade Linie zwischen die Schenkel des gegenüberliegenden Winkels zu legen, welche der gegebenen geraden Linie b gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey E'F' die gesuchte Linie, so ist, wenn über F'E', als Durchmessern, ein Kreis beschrieben wird, welcher durch C lauft, und die Verlängerung der Diagonale CA in R schneide, RF'A = RCE', wenn die gerade Linie RF' gezogen worden ist;

12*

$= RCF'$

also $CR:RF' = F'R:RA$

folglich $CR.RA = RF'^2$.

Da Bogen $E'R$ = Bogen RF', so ist RF' die Chorde eines Quadranten in dem Kreise, dessen Diameter $E'F' = b$ ist, ist also gegeben; mithin lässt sich der Punkt R, und mit ihm der Punkt F' finden.

Construction.

Man mache $AN = b$, beschreibe über AN einen Halbkreis, errichte in dem Mittelpunkte M desselben auf AN einen perpendikularen Radius, ziehe die gerade Linie AO, errichte in A auf AC ein Perpendikel $AP = AO$, halbire AC in Q, ziehe die gerade Linie OP, beschreibe aus Q, als Mittelpunkt, einen Kreis mit einem Radius = QP, welcher der verlängerten CA in R begegne, lege durch P, R die Linien PS, RS den Linien AR, AP parallel, beschreibe aus R, als Mittelpunkt, einen Kreis mit einem Radius = RS, welcher der verlängerten CB in F' begegne, und ziehe durch A die, die verlängerte Linie CD in E' schneidende, gerade Linie F'E', so ist E'F' die gesuchte Linie.

Determination.

Damit der Kreis, welcher in R seinen Mittelpunkt hat, die Linie CB erreiche, muss, wenn das Perpendikel RU auf CB gefällt wird,

$$RS \geqq RU \text{ seyn,}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} RS^2 \\ AP^2 \\ AO^2 \\ \frac{1}{2}b^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{>} \begin{cases} RU^2 \\ \frac{1}{2}CR^2 \end{cases}$$

$$\text{folglich } b^2 \overset{=}{>} CR^2$$

$$\text{mithin } b \overset{=}{>} \begin{cases} CR \\ RQ + QC \end{cases}$$

$$\text{somit } b^2 - 2\,b.QC + QC^2 \overset{=}{>} \begin{cases} RQ^2 \\ QP^2 \\ PA^2 + QA^2 \end{cases}$$

$$\text{demnach } b^2 - b\,.\,AC \overset{=}{>} \begin{cases} PA^2 \\ \frac{1}{2}b^2 \end{cases}$$

$$\text{also } b - AC \overset{=}{>} \frac{1}{2}b$$

$$\text{folglich } \frac{1}{2}b \overset{=}{>} AC$$

$$\text{mithin } b \overset{=}{>} \begin{cases} 2\,AC \\ VX, \end{cases}$$ wenn $CAV = CAX = R$ ist.

Beweis.

Es ist $b \overset{=}{>} VX$ (Det.)

somit $RS \overset{=}{>} RU$, wie aus der Determination erhellet;

mithin erreicht der Kreis die Linie CB in einem Punkte F, so dass $RF^2 = CR.RA$

$$\text{mithin } CR:RF' = F'R:RA$$

$$\text{demnach } RF'A = RCF'$$

$= RCE'$; also liegen die Punkte R, E', C, F' auf dem Umfange eines Kreises, welcher über EF', als Durchmessern, beschrieben wird, und es ist arc.E'R = arc.RF', also RF' die Chorde eines Quadranten. Da RF' = AO, und AO die Chorde des über AN = b beschriebenen Halbkreises ist, so ist E'F' = b.

Zusatz 1.

Es erhellet von selbst, dass es, wenn der Kreis, welcher R zum Mittelpunkte hat, die Linie CB berührt, eine einzige, wenn er sie schneidet, eine zweite Linie mit der gegebenen Eigenschaft giebt.

Zusatz 2.

Nimmt man auch den Durchschnitt R' des Kreises, welcher Q zum Mittelpunkte hat, mit der verlängerten CA, verlängert SP bis zum Durchschnitte mit dem, in R' auf CR' errichteten, Perpendikel R'S', und beschreibt einen Kreis aus R', als Mittelpunkte, mit einem Radius = R'S', so schneidet derselbe die Linie BC in F, CD in L,

$$\text{weil } \tfrac{1}{2}b + AC > 0$$

$$\text{also } \tfrac{1}{2}b^2 + 2b.QC > 0$$

$$\text{folglich } b^2 + 2b.QC > \begin{cases} \tfrac{1}{2}b^2 \\ PA^2 \end{cases}$$

$$\text{mithin } b^2 + 2b.QC + CQ^2 > \begin{cases} PA^2 + AQ^2 \\ QP^2 \\ RQ^2 \end{cases}$$

$$\text{somit } b + QC > RQ$$

demnach b $> \begin{cases} RQ - QC \\ CR \end{cases}$

also $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} b^2 \\ AQ^2 \\ AP^2 \\ RS^2 \end{array}\right\} > \begin{cases} \frac{1}{2} CR^2 \\ RU^2 \end{cases}$

folglich SR $>$ RU;

und nun ist, wenn die geraden Linien AF, AL gezogen werden, welche die Verlängerung von DC, BC in E, H schneiden, $CR' : R'F = FR' : R'A$

also $AFR' = FCR'$
$= ACE$

folglich $CR'F = CEF$;

demnach liegen F, C, R', E auf dem Umfange des Kreises, welcher FE zum Diameter hat, so dass

$R'FE = 2R - \begin{cases} AFR' \\ FCR' \end{cases}$
$= FER'$

mithin arc.ER' = arc.FR';

also ist $\left.\begin{array}{l} FR' \\ R'S' \\ AO \end{array}\right\}$ die Chorde eines Quadranten AO des über

FE beschriebenen Kreises, somit FE $=$ AN
$=$ b.

Eben so ist $CR' : R'L = LR' : R'A$

also $ALR' = LCR'$
$= ACH$

folglich $CR'L = LHC$

demnach liegen H, L, C, R' auf einem Kreisumfange, welcher LH zum Durchmesser hat, so dass

$$HLR' = 2R - \begin{cases} ALR' \\ LCR' \end{cases}$$
$$= LHR'$$

also arc. HR' = arc. $R'L$

folglich ist LR' die Chorde eines Quadranten AO des, über HL beschriebenen, Kreises, somit $HL = AN = b$.

Zusatz 3.

Beschreibt man über der Linie $B'A = AB$, welche auf der Verlängerung von BA über A hinaus genommen ist, auf der anderen Seite von BB', als da, wo $ABCD$ liegt, ein Quadrat $AB'C'D'$, so lösen die Linien AE, AL AE', AL' obige Aufgabe zugleich in Beziehung auf das Quadrat von AB' auf, und bestimmen namentlich die Linien $F''E''$, $H''L''$, $F'''E'''$, $H'''L'''$ zwischen den Schenkeln des, dem Winkel $B'AD'$ gegenüberliegenden, Winkels von einer Länge $= b$.

Algebraische Auflösung.

Setzt man zur algebraischen Bestimmung die Linie

$$BF = x, \quad BA = a$$

so ist $CF = a - x$, $AF^2 = a^2 + x^2$.

Nun ist $AF^2 : FB^2 = EF^2 : FC^2$

$$\text{also } a^2 + x^2 : x^2 = b^2 : \begin{cases} (a-x)^2 \\ a^2 - 2ax + x^2 \end{cases}$$

folglich $b^2x^2 = a^4 + a^2x^2 - 2a^3x - 2ax^3 + a^2x^2 + x^4$

mithin $x^4 - 2ax^3 - (b^2 - 2a^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$

d. i. $(x^2 + (\sqrt{(a^2+b^2)} - a)x + a^2)(x^2 - (\sqrt{(a^2+b^2)} + a)x + a^2) = 0$

demnach entweder $x^2 + (\sqrt{(a^2+b^2)} - a)x + a^2 = 0$

oder $x^2 - (\sqrt{(a^2+b^2)} + a)x + a^2 = 0$

also entw. $\left(x + \frac{\sqrt{(a^2+b^2)} - a}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)} - a}{2}\right)^2 - a^2$

$$= \frac{a^2 + b^2 - 2a\sqrt{(a^2+b^2)} + a^2 - 4a^2}{4}$$

$$= \frac{b^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2+b^2)}}{4}$$

folglich $x = -\frac{\sqrt{(a^2+b^2)} - a}{2} \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$.

$$= \frac{a - \sqrt{(a^2+b^2)} \pm \sqrt{(b^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$$

oder $\left(x - \frac{\sqrt{(a^2+b^2)} + a}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)} + a}{2}\right) - a^2$

$$= \frac{a^2 + b^2 + 2a\sqrt{(a^2+b^2)} + a^2 - 4a^2}{4}$$

$$= \frac{b^2 - 2a^2 + 2a\sqrt{(a^2+b^2)}}{4}$$

folglich $x = \frac{+\sqrt{(a^2+b^2)} + a \pm \sqrt{(b^2 - 2a^2 + 2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$.

Die vier Werthe von x sind also

$$x' = \frac{-\sqrt{(a^2+b^2)} + a + \sqrt{(b^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$$

$$x'' = \frac{-\sqrt{(a^2+b^2)} + a - \sqrt{(b^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$$

$$x''' = \frac{+\sqrt{(a^2+b^2)}+a+\sqrt{(b^2-2a^2+2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$$

$$x'''' = \frac{+\sqrt{(a^2+b^2)}+a-\sqrt{(b^2-2a^2+2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}.$$

Da $(\sqrt{(a^2+b^2)}-a)^2 > \begin{cases}(\sqrt{(a^2+b^2)}-a)^2-4a^2\\ b^2-2a^2-2a\sqrt{(a^2+b^2)}\end{cases}$

so ist $\sqrt{(a^2+b^2)}-a > \sqrt{(b^2-2a^2-2a\sqrt{(a^2+b^2)})}$

folglich $\sqrt{(a^2+b^2)} > a+\sqrt{(b^2-2a^2-2a\sqrt{(a^2+b^2)})}$;

mithin ist der erste, und noch viel mehr der zweite jener Werthe von x negativ, dagegen sind die beiden letzteren positiv, übereinstimmend mit der geometrischen Construction, welche BH', BF' in die, den Linien BH, BF entgegengesetzte, Lage bringt. Es ist also

$$x' = BH'$$
$$x'' = BF'$$
$$x''' = BH$$
$$x'''' = BF.$$

Uebrigens sind die beiden ersten Werthe nur möglich, wenn

$$b^2 \overset{=}{>} 2a^2+2a\sqrt{(a^2+b^2)}$$

also $b^2-2a^2 \overset{=}{>} 2a\sqrt{(a^2+b^2)}$

folglich $b^4-4a^2b^2+4a^4 \overset{=}{>} 4a^4+4a^2b^2$

mithin $b^4 \overset{=}{>} 8a^2b^2$

somit $b^2 \overset{=}{>} 8a^2$.

Macht man CAT = CAU = R, so ist

$$\begin{aligned} TU^2 &= TC^2 + UC^2 \\ &= 2\,TC^2 = 2.4\,CD^2 \\ &= 8.CD^2 \\ &= 8.a^2 \end{aligned}$$

also muss $b \geqq TU$ seyn.

Anmerkung 1.

Verwandelt man, um diese Werthe von x in diejenigen umzuändern, welche dem Quadrate $AB'C'D'$ angehören, den Werth von a in $-a$, so wird

$$x' = \frac{-\sqrt{(a^2+b^2)} - a + \sqrt{(b^2 - 2a^2 + 2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$$

$$x'' = \frac{-\sqrt{(a^2+b^2)} - a - \sqrt{(b^2 - 2a^2 + 2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$$

$$x''' = \frac{+\sqrt{(a^2+b^2)} - a + \sqrt{(b^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$$

$$x'''' = \frac{+\sqrt{(a^2+b^2)} - a - \sqrt{(b^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}.$$

Der $\left\{\begin{array}{c}\text{erste}\\ \text{zweite}\\ \text{dritte}\\ \text{vierte}\end{array}\right\}$ dieser Werthe ist der entgegengesetzte

des $\left\{\begin{array}{c}\text{vierten}\\ \text{dritten}\\ \text{zweiten}\\ \text{ersten}\end{array}\right\}$ der obigen, und ihm, absolut genommen, gleich.

Die Construction stellt sie in der Ordnung dar durch $B'F''$, $B'H''$, $B'F'''$, $B'H'''$.

Anmerkung 2.

Es ist AF:FB = EF:FC. Setzt man AF = y, so ist $y:\sqrt{(y^2-a^2)} = b:a-\sqrt{(y^2-a^2)}$

also $ay-y\sqrt{(y^2-a^2)} = b\sqrt{(y^2-a^2)}$

folglich $ay = (b+y)\sqrt{(y^2-a^2)}$

mithin $a^2y^2 = (b^2+2by+y^2)(y^2-a^2)$

$= b^2y^2+2by^3+y^4-a^2b^2-2a^2by-a^2y^2$

somit $a^2b^2 = y^4+2by^3+(b^2-2a^2)y^2-2a^2by$

demnach $a^4+a^2b^2 = y^4+2by^3+(b^2-2a^2)y^2-2a^2by+a^4$

$= (y^2+by-a^2)^2$

also $\pm\sqrt{(a^4+a^2b^2)} = y^2+by-a^2$

folglich $a^2+\frac{1}{4}b^2\pm\sqrt{(a^4+a^2b^2)} = (y+\frac{1}{2}b)^2$

demnach $y = -\frac{1}{2}b\pm\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}b^2\pm\sqrt{(a^2+b^2)})}$.

Die vier Werthe von y sind also folgende:

$y' = -\frac{1}{2}b+\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}b^2+a\sqrt{(a^2+b^2)})}$

$y'' = -\frac{1}{2}b-\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}b^2+a\sqrt{(a^2+b^2)})}$

$y''' = -\frac{1}{2}b+\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}b^2-a\sqrt{(a^2+b^2)})}$

$y'''' = -\frac{1}{2}b-\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}b^2-a\sqrt{(a^2+b^2)})}$.

Um zu erkennen, welche Linien durch diese Werthe angedeutet sind, setze man AO = z, wenn O der Halbirungspunkt von FE ist, also AE = $z+\frac{1}{2}b$, AF = $z-\frac{1}{2}b$.

Da nun $AE^2:ED^2 = FA^2:AB^2$,

so ist $(z+\frac{1}{2}b)^2:(z+\frac{1}{2}b)^2-a^2 = (z-\frac{1}{2}b)^2:a^2$

$$\text{also } a^2(z+\tfrac{1}{2}b)^2 = (z+\tfrac{1}{2}b)^2(z-\tfrac{1}{2}b)^2 - a^2(z-\tfrac{1}{2}b)^2$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{folglich } a^2((z+\tfrac{1}{2}b)^2+(z-\tfrac{1}{2}b)^2) \\ a^2(2z^2+\tfrac{1}{2}b^2) \\ 2a^2z^2+\tfrac{1}{2}a^2b^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = (z^2-\tfrac{1}{4}b^2)^2 \\ = z^4-\tfrac{1}{2}b^2z^2+\tfrac{1}{16}b^4 \\ \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } \tfrac{1}{2}a^2b^2-\tfrac{1}{16}b^4 &= z^4-(\tfrac{1}{2}b^2+2a^2)z^2 \\ &= z^4-2(\tfrac{1}{4}b^2+a^2)z^2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{somit } \tfrac{1}{2}a^2b^2-\tfrac{1}{16}b^4+(a^2+\tfrac{1}{4}b^2)^2 \\ \tfrac{1}{2}a^2b^2-\tfrac{1}{16}b^4+a^4+\tfrac{1}{2}a^2b^2+\tfrac{1}{16}b^4 \\ a^4+a^2b^2 \\ a^2(a^2+b^2) \end{array}\right\} = (z^2-(\tfrac{1}{4}b^2+a^2))^2$$

$$\text{demnach } z^2-(\tfrac{1}{4}b^2+a^2) = \pm a\sqrt{(a\ +b^2))}$$

$$\text{also } z = \pm\sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2\pm a\sqrt{(a^2+b^2)})}.$$

Es hat mithin z vier Werthe, wovon je zwey einander gleich, und entgegengesetzt sind, welche sind

$$\begin{aligned} z' &= +\sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2+a\sqrt{(a^2+b^2)})} \\ z'' &= -\sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2+a\sqrt{(a^2+b^2)})} \\ z''' &= +\sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2-a\sqrt{(a^2+b^2)})} \\ z'''' &= -\sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2-a\sqrt{(a^2+b^2)})}. \end{aligned}$$

Bezeichnet demnach z' den Werth von AO, so bezeichnet z'' den von AO'. Deutet z''' den Werth von AO'' an, so bezeichnet z'''' den Werth von AO'''.

Obige Werthe von y werden aber aus diesen Werthen von z erhalten, wenn mit jedem derselben $-\frac{1}{2}b$ verbunden wird, so dass y' den Werth von AF, y'' den Werth von AE'', y''' den von AE', y'''' den von AF''' be-

zeichnet. Die Werthe von AQ, AQ'', und von AQ', AQ''', wenn Q, Q'', Q', Q''' die Halbirungspunkte der Linien LH, L''H'', L'H', L'''H''' bezeichnen, werden nicht besonders angegeben, weil sie der Lage und Grösse nach dieselbigen sind, wie die von AO, AO', AO'', AO'''. Weil AO = AQ, und keine der anderen entgegengesetzt ist, so giebt die Algebra auf die Frage, in welcher Entfernung von A der Halbirungspunkt der in dem Nebenwinkel des Winkels BCD liegenden, der Linie b gleichen, Linie liege, nur eine einzige Antwort, weil es nur eine einzige Entfernung giebt, man mag sie in dem einen, oder dem anderen Nebenwinkel suchen, und deutet sie durch $+\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}b^2+a\sqrt{(a^2+b^2)})}$ u. s. w. an. Es bezeichnen desshalb auch obige Werthe von y, welche durch y', y'', y''', y'''' angedeutet werden, nicht, wie es anfangs scheinen konnte, die Linie AF, AH, AF', AH', sondern die Linien AF, AE'', AE', AF'''. Und die Algebra ist hier nicht, wie man glaubt, in dem Falle, die Linien AH, AH' für negative auszugeben, wenn sie AF, AO'' als positive bezeichnet.

Aufgabe XLIX. (Fig. 44.)

Den Sinus der Hälfte eines gegebenen Winkels ACB = a zu finden.

Auflösung.

Es ist $\cos.(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b)=\cos.\frac{1}{2}a.\cos.\frac{1}{2}b-\sin.\frac{1}{2}a.\sin.\frac{1}{2}b$.
Setzt man a = b, so ist $\cos.a = \cos.\frac{1}{2}a^2-\sin.\frac{1}{2}a^2$.

$$= 1-2(\sin.{}^1/_2\,a)^2$$

$$\text{also } \sin.{}^1/_2\,a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos.a}{2}}.$$

Anmerkung.

Da der Sinus der Hälfte des Winkels a aus dem Cosinus dieses Winkels ausgedrückt wird, der Cosinus CD des Winkels a aber auch der Cosinus anderer Winkel ist, so hat die Algebra den Sinus der Hälfte aller der Winkel auszudrücken, welche CD zum Cosinus haben. Das geschieht durch die Zeichen + —. Die Linie CD ist z. E. auch der Cosinus des erhabenen Winkels ACB', so wie des hohlen Winkels ACB'. Der Sinus der Hälfte jenes Winkels ist E''F'', dieses E'F. Der Ausdruck für sin. $\frac{1}{2}$ a muss also sowohl den Werth von EF, wenn ACE = $\frac{1}{2}$ ACB ist, als den von E''F'' und von E'F anzeigen, und alles dieses leistet sie durch das doppelte Zeichen.

Aufgabe L. (Fig. 44.)

Den Cosinus der Hälfte eines gegebenen Winkels ACB = a zu finden.

Auflösung.

$$\text{Es ist } \cos.\, a = (\cos.\, \tfrac{1}{2}a)^2 - (\sin.\, \tfrac{1}{2}a)^2$$
$$= (2\cos\, \tfrac{1}{2}a)^2 - 1$$

$$\text{folglich } \cos.\, \tfrac{1}{2}a = \pm \sqrt{\frac{1+\cos.a}{2}}.$$

Anmerkung.

Da der Cosinus der Hälfte des Winkels a aus dem Cosinus dieses Winkels ausgedrückt wird, der Cosinus CD des Winkels a aber auch der Cosinus anderer Winkel ist, z. E. des erhabenen Winkels ACB',

des hohlen Winkels ACB' u. s. w., so muss die Algebra den Cosinus der Hälfte aller der Winkel angeben, welche CD zum Cosinus haben. Und das geschieht durch die Zeichen + —. Der Cosinus der Hälfte des Winkels a ist CF, der Hälfte des erhabenen Winkels ACE' ist CF'', der Hälfte des hohlen Winkels ACB' ist CF, welche Linien alle durch $\pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$ ausgedrückt sind.

Aufgabe LI. (Fig. 44.)

Die Secante der Hälfte des gegebenen Winkels ACB = a zu finden.

Auflösung.

$$\text{Es ist } \sec . \tfrac{1}{2} a = \frac{1}{\cos . \tfrac{1}{2} a} = \frac{1}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos . a}{2}}} =$$

$$\pm \sqrt{\frac{2}{1 + \cos . a}} .$$

Anmerkung.

Die Secanten müssen, wenn der Gegensatz der Lage sich vollkommen darstellen soll, u. man nicht in unüberwindliche Schwierigkeiten gerathen will, wie alle übrigen trigonometeischen Linien, auf einer einzigen geraden Linie, namentlich auf einem einzigen Diameter und seiner Verlängerung, dargelegt werden. Das geschieht, wenn man sie als denjenigen Theil eines durch den Anfangspunkt des Bogens gezogenen und verlängerten Diameters definirt, welcher zwischen dem Mittelpunkte und dem Durchschnittspunkte der durch den Endpunkt des Bogens an den Kreis

gelegten Tangente enthalten ist. Da nun aber die Secante der Hälfte des Winkels a durch den Cosinus CD dieses Winkels ausgedrückt wird, die Linie CD aber auch der Cosinus anderer Winkel, wie, z. E. des erhabenen Winkels ACB′, des hohlen Winkels ACB′ u. s. w. ist, so hat die Algebra zugleich die Secanten der Hälften aller jener Winkel, welche CD zum Cosinus haben, anzugeben. Das thut sie durch die Zeichen + —. Nämlich die Secante von $\frac{1}{2}$ ACB ist = CH, von der Hälfte des erhabenen Winkels ACB′ ist = CH′, der Hälfte des hohlen Winkels ACB′ = CH etc., Linien, welche einander gleich, und der Lage nach einerley, oder einander entgegengesetzt, also alle in dem Ausdrucke

$\pm\sqrt{\frac{2}{1+\cos.a}}$ enthalten sind.

Aufgabe LII. (Fig. 44.)

Die Cosecante der Hälfte des gegebenen Winkels ACB = a zu finden.

Auflösung.

Es ist $\text{cosec.}\,\frac{1}{2}a = \frac{1}{\sin.\frac{1}{2}a} = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1-\cos.a}{2}}} =$

$\pm\sqrt{\frac{2}{1-\cos.a}}$.

Anmerkung.

Wenn der Gegensatz der Lage der Cosecanten der verschiedenen Winkel gehörig dargelegt werden soll, und man nicht in unüberwindliche Schwierigkeiten, wie sie die gewöhnliche Behandlung dieser Linie nach sich zieht,

sich verwickeln will, so müssen alle Cosecanten, wie es bey allen übrigen trigonometrischen Linien geschiehet, oder doch geschehen kann, auf einen einzigen Diameter und seine Verlängerung gelegt werden. Das geschieht, wenn man sie als denjenigen Theil eines, durch den Endpunkt des Quadranten, welcher mit dem Bogen einerley Anfangspunkt hat, gelegten, Durchmessers betrachtet, welcher zwischen dem Mittelpunkte und dem Durchschnittspunkte der, durch den Endpunkt des Bogens gelegten, Kreistangente enthalten ist. Da nun die Cosecante der Hälfte des Winkels a aus dem Cosinus desselben ausgedrückt wird, so ist dieser Ausdruck auch der Ausdruck für die Cosecanten der Hälften aller anderen Winkel, welche denselben Cosinus haben. Derselbe Cosinus gehört aber auch unter anderen dem erhabenen Winkel ACB', und dem hohlen Winkel ACB' zu, also muss der Ausdruck für cosec. $1/2$ a auch die Werthe von cosec. $1/2$ ACB' enthalten, mag man unter ACB' den erhabenen, oder den hohlen Winkel verstehen. Das alles geschieht durch die Bestimmung, dass $\text{cosec.}\,1/2\,a = \pm \sqrt{\frac{2}{1-\cos.a}}$ sey. Der Winkel $1/2$ ACB hat zur Cosecante CL, der Winkel $1/2$ ACB', wenn ACB' $\left\{\begin{matrix}\text{erhaben}\\ \text{hohl}\end{matrix}\right\}$ ist, $\left\{\begin{matrix}CL\\ CL'\end{matrix}\right\}$, und die eine Linie ist der anderen gleich, der Lage nach aber entgegengesetzt.

Aufgabe LIII. (Fig. 45.).

Den Sinus der Summe eines Winkels von 45° und des gegebenen Winkels ACB = a zu finden.

Auflösung.

$$\text{Es ist } \left.\cos.\frac{R-2a}{2}\right\} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos.(R-2a)}{2}}$$

$$\left.\begin{matrix}\cos.(45^\circ-a)\\ \sin.(45^\circ+a)\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{1+\sin.2a}{2}}.$$

Anmerkung.

Da der Sinus von $(45^\circ+a)$ aus dem Sinus des Doppelten des Winkels a ausgedrückt wird, so muss der Ausdruck von $\sin.(45^\circ+a)$ den Werth von den Sinus aller Winkel enthalten, welche aus 45° und den Winkeln bestehen, deren Doppeltes einen Sinus = GH hat, wenn arc.AG = 2.arc.AB ist. Nun hat, z. E., der Winkel ACK, wenn GK#AF ist, einen Sinus KL = GH, der Winkel, welcher vom Bogen AKQG gemessen wird, hat GH selbst zum Sinus. Also muss $\sin.(45^\circ+a)$ neben dem Werthe von DE, auch, wenn BD = 45° genommen wird, den Werth von sin. $\left\{\begin{matrix}45^\circ+\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}ACK\\ \frac{2R-2a}{2}\\ R-a\end{matrix}\right\}\\ 135^\circ-a\end{matrix}\right\}$ und von $\left\{\begin{matrix}45^\circ+\left\{\begin{matrix}\frac{4R+2a}{2}\\ 2R+a\end{matrix}\right\}\\ 225^\circ+a\end{matrix}\right\}$ u. s. w. enthalten. Es ist aber $135^\circ-a+45^\circ+a=180^\circ$, also ist $\sin.(135^\circ-a)=\sin.(45^\circ+a)$. Es ist $225^\circ+a-45^\circ-a=180^\circ$, alo ist $\sin(225^\circ+a)=-\sin.(45^\circ+a)$ u. s. w. Mithin drückt die Algebra alles vollständig durch $\pm\sqrt{\frac{1+\sin.2a}{2}}$ aus, wie es der geometri-

schen Construction gemäss ist, welche OP = DE als sin(135°—a), und PQ = OP = DE als sin(225°+a) construirt, aber PQ mit OP in die entgegengesetzte Richtung legt.

Aufgabe LIV. (Fig. 45.)

Den Cosinus des Winkels = $45° + \left\{ \begin{matrix} ACB \\ a \end{matrix} \right\}$ zu finden.

Auflösung.

Es ist
$$\left. \begin{matrix} \sin.\frac{R-2a}{2} \\ \sin.(45°-a) \\ \cos.(45°+a) \end{matrix} \right\} \begin{matrix} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(R-2a)}{2}} \\ = \pm\sqrt{\frac{1-\sin.2a}{2}}. \end{matrix}$$

Anmerkung.

Da cos.(45°+a) aus dem Sinus des Doppelten des Winkels a ausgedrückt wird, so muss der Ausdruck von cos.(45°+a) den Werth von den Cosinus aller Winkel enthalten, welche aus 45° und den Winkeln bestehen, deren Doppeltes einen Sinus = GH hat. Nun hat z. E. der Winkel ACK, wenn GK ‡ AB gelegt wird, einen Sinus KL = GH, der Winkel, welcher vom Bogen AKQG gemessen wird, hat GH selbst zum Sinus u. s. w. Also muss cos.(45°+a) neben dem Werthe von CE, wenn BD = 45° genommen wird, auch den Cosinus des Winkels von $\left\{ \begin{matrix} 45° + \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} ACK \\ \frac{2R-2a}{2} \\ R-a \end{matrix} \right\} \\ 135°-a \end{matrix} \right\}$ und des Winkels von

$\left.\begin{matrix}45^\circ + \left(\dfrac{4R+2a}{2}\right) \\ \left(2R+a\right) \\ 225^\circ + a\end{matrix}\right\}$ u. s. w. enthalten. Es ist aber

$135^\circ - a + 45^\circ + a = 180^\circ$, also ist $\cos.(135^\circ - a) = -\cos.(45^\circ + a)$. Es ist $225^\circ + a - (45^\circ + a) = 180^\circ$, also ist $\cos.(225^\circ + a) = -\cos.(45^\circ + a)$. Mithin drückt die Algebra alles vollständig durch $\pm \sqrt{\dfrac{1 + \sin.2a}{2}}$ aus, wie es der geometrischen Darstellung gemäss ist, welche $PC = \cos.(135^\circ - a) = \cos(225^\circ + a) = CE$ macht, und in die entgegengesetzte Richtung legt.

Aufgabe LV.

Den Sinus des Uebetschusses eines gegebenen Winkels von a° über einen Winkel von 45° zu finden.

Auflösung.

$$\left.\begin{matrix}\text{Es ist } \sin.\dfrac{2a-R}{2} \\ \sin.(a-45^\circ)\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos.(2a-R)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\sin.(2R-2a)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\sin.2a}{2}}.$$

Anmerkung.

Es gelten hier dieselben Betrachtungen, wie bey den vorhergehenden Aufgaben.

Aufgabe LVI.

Den Cosinus der Differenz der Winkel von a° und 45° zu finden.

Auflösung.

$$\text{Es ist } \left.\begin{array}{l}\cos.\frac{2a-R}{2}\\ \cos.(a-45°)\end{array}\right\} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos.(2a-R)}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\sin.(2R-2a)}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\sin.2a}{2}}.$$

Anmerkung 1.

Hier gelten dieselben Betrachtungen, wie bey den vorhergehenden Aufgaben.

Anmerkung 2.

$$\text{Eben so ist } \sin.(45°-a) = \sin.\frac{R-2a}{2}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos.(R-2a)}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\sin.2a}{2}};$$

$$\text{und } \cos.(45°-a) = \cos.\frac{R-2a}{2}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\cos.(R-2a)}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\sin.2a}{2}}.$$

Anmerkung 3.

Zu ganz ähnlichen Betrachtungen führen die Formeln für

$$\sec.(45^\circ+a)=\frac{1}{\cos(45^\circ+a)},\quad \text{cosec}.(45^\circ+a)=\frac{1}{\sin.(45^\circ+a)}$$

$$=\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1-\sin.2a}{2}}}\qquad =\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1+\sin.2a}{2}}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{2}{1-\sin.2a}}\qquad =\pm\sqrt{\frac{2}{1+\sin.2a}}$$

$$\sec.(a-45^\circ)=\frac{1}{\cos.(a-45^\circ)},\quad \text{cosec}.(a-45^\circ)=\frac{1}{\sin.(a-45^\circ)}$$

$$=\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1+\sin.2a}{2}}}\qquad =\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1-\sin.2a}{2}}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{2}{1+\sin.2a}}\qquad =\pm\sqrt{\frac{2}{1-\sin.2a}}$$

$$\sec.(45^\circ-a)=\frac{1}{\cos.(45^\circ-a)},\quad \text{cosec}.(45^\circ-a)=\frac{1}{\sin.(45^\circ-a)}$$

$$=\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1+\sin.2a}{2}}}\qquad =\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1-\sin.2a}{2}}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{2}{1+\sin.2a}}.\qquad =\pm\sqrt{\frac{2}{1-\sin.2a}}.$$

Aufgabe LVII. (Fig. 46.).

Den Sinus eines Winkels a aus dem Cosinus zu bestimmen.

Auflösung.

$$(\sin.a)^2 = 1 - (\cos.a)^2$$

$$\text{also } \sin.a = \pm\sqrt{(1 - (\cos.a)^2)}.$$

Anmerkung.

Da der Sinus aus dem Cosinus ausgedrückt wird, so enthält der Ausdruck von sin.a den Sinus aller Winkel, welche denselben Cosinus haben. Nun haben z. E. der erhabene Winkel ACD, der hohle Winkel ACD u. s. w. denselben Cosinus CE, wie der Winkel ACB = a. Da nun DE der Sinus der letztgenannten Winkel ist, so giebt der Ausdruck von sin.a sowohl den einen, als den anderen an, indem die Algebra $\sin.a = \pm\sqrt{(1 - (\cos.a)^2)}$ setzt.

Aufgabe LVIII. (Fig. 46.)

Den Cosinus des Winkels a aus dem Sinus auszudrücken.

Auflösung.

Es ist $\cos.a = \pm\sqrt{(1 - (\sin.a)^2)}$.

Anmerkung.

Da der Cosinus aus dem Sinus ausgedrückt wird, so giebt der Ausdruck von cos.a die Cosinus aller Winkel an, welche einen Sinus = BE haben. Nun ist sin.ACG = GH

= BE, wenn BG ‡ AC ist. Es ist der Sinus des Winkels, welcher vom Bogen AGDB gemessen wird, = BE u. s. w. und der Cosinus jenes Winkels ist = CH, dieses = CE. Desshalb setzt die Algebra cos. a =

$\pm \sqrt{(1-(\sin.a)^2)}$, in welchem Ausdruck alle jene Linien enthalten sind.

Aufgabe LIX. (Fig. 46.).

Die Tangente eines Winkels a aus dem Sinus auszudrücken.

Auflösung.

$$\text{Es ist } \tan.a = \frac{\sin.a}{\cos.a}$$

$$= \pm \frac{\sin.a}{\sqrt{(1-(\sin.a)^2)}}.$$

Anmerkung 1.

Da die Tangente aus dem Sinus ausgedrückt wird, so muss der Ausdruck für tan.a die Tangenten aller Winkel angeben, welche denselben Sinus haben. Nun haben z. E. der Winkel ACB, und der Winkel ACG denselben Sinus, also muss tan.a sowohl die Tangente von ACB, als von ACG angeben, und das geschieht durch $\tan.a = \pm \frac{\sin.a}{\sqrt{(1-(\sin.a)^2)}}$, während die Geometrie die Tangenten KA, AL der zu jenen Winkeln gehörigen Bogen einander gleich, aber in gerade entgegengesetzter Richtung darlegt.

Anmerkung 2.

In ganz ähnlicher Art verhält es sich mit den Ausdrücken der Tangente aus dem Cosinus, der Cotangente aus dem Sinus, oder dem Cosinus u. s. w.

Aufgabe LX. (Fig. 46.).

Den Cosinus eines Winkels a aus der Tangente auszudrücken.

Auflösung.

$$\text{Es ist } \cos.a = \frac{1}{\sec.a}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{(1+(\tan.a)^2)}}.$$

Anmerkung.

Zu jeder Tangente, sie sey positiv, oder negativ, gehört also ein doppelter Cosinus. Nämlich AK ist sowohl die Tangente von arc. AB, als z. E. von arc. AGM, wenn BM ein Durchmesser ist. Jener Bogen hat CE, dieser CH zum Cosinus, wovon dieser jenem gleich ist, aber entgegengesetzt liegt. AL ist die Tangente des Bogens AB und z. E. zugleich des Bogens AGD, wovon jener CH, dieser CE zum Cosinus hat, und jener diesem gleich ist, aber entgegengesetzt liegt.

Aufgabe LXI.

Die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Reihe zu suchen, deren erstes Glied = 1, Differenz = 1, und Summe der Glieder = 10 sey.

Auflösung.

Aus bekannten Gründen muss, wenn x die Anzahl der Glieder bezeichnet, die Gleichung statt finden

$$\frac{x(x+1)}{2} = 10$$

$$\text{also } x^2+x = 20$$

$$\text{folglich } x^2+x+\tfrac{1}{4} = 20\tfrac{1}{4}$$

$$\text{mithin } x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \pm \frac{9}{2}$$

demnach hat x die Werthe $\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{9}{2} = +4 \\ -\frac{1}{2}-\frac{9}{2} = -5 \end{Bmatrix}$.

Es weiset also die Algebra auf zwey Reihen hin, wovon die eine aus 4, die andere aus −5 Gliedern bestehet, in deren einer das letzte Glied also auch = +4, der anderen = −5 ist.

Anmerkung 1.

Setzt man das erste Glied der Reihe = 0, die Differenz = 1, die Summe = 10, und sucht die Anzahl x der Glieder, so hat man die Gleichung

$$\frac{x(x-1)}{2} = 10$$

$$\text{also } x^2 - x = 20$$

$$\text{folglich } x^2 - x + \tfrac{1}{4} = 20\tfrac{1}{4}$$
$$= \tfrac{81}{4}$$

$$\text{mithin } x = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{81}{4}}$$
$$= \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{9}{2}$$

demnach entweder $x = +5$

oder $x = -4$.

Sucht man das letzte Glied U dieser Reihe, unabhängig von dieser Rechnung, so hat man die Gleichung

$$\frac{U(U+1)}{2} = 10$$

$$\text{also } U^2 + U = 20$$

$$\text{folglich } U^2 + U + \tfrac{1}{4} = 20\tfrac{1}{4}$$
$$= \tfrac{81}{4}$$

$$\text{mithin } U = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{81}{4}}$$
$$= -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{9}{2}$$

$$\text{demnach entweder } U = +4$$
$$\text{oder } U = -5.$$

Anmerkung 2.

Die Algebra hat es in allen diesen Aufgaben mit der folgenden Reihe zu thun:

$$-5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

und sie giebt auf die in der Aufgabe ihr vorgelegte Frage, wie gross die Anzahl x der Glieder dieser Reihe sey, wenn 1 das erste Glied genannt, und die Hälfte des Produktes aus der Anzahl der Glieder und der Summe des ersten und letzten Gliedes $= 10$ gesetzt wird, die doppelte Antwort, es sey $x = +4$, oder $= -5$. Soll die Reihe mit 0 anfangen, so antwortet sie in Anmerkung 1 auf die Frage, wie gross die Anzahl der Glieder dieser Reihe sey, wenn die Hälfte des Produktes aus der Anzahl der Glieder und der Summe des ersten und letzten Gliedes $= 10$ gesetzt wird, auf die doppelte Weise, es sey $x = +5$ oder $x = -4$. Oder sie sagt, wenn nach dem letzten Gliede U gefragt wird, es sey $U = +4$, oder $U = -5$. Beide Reihen 0 1 2 3 4, und -5 -4 -3 -2 -1 0 leisten das Verlangte.

Und so dient auch dies zu einem Beispiel, wie die Algebra niemals eine doppelte Antwort giebt, wenn nur eine einfache statt finden kann.

Aufgabe LXII.

Eine Gesellschaft tritt zu einem gemeinschaftlichen Handlungsgeschäfte zusammen. Jedes Glied legt doppelt so viel Thaler ein, als die Zahl der Glieder der Gesellschaft anzeigt. Auf 100. des Kassenbestandes werden so viel Thaler gewonnen, als die Einlage eines Gliedes beträgt. Der Totalgewinn ist der doppelten Einlage eines Jeden gleich. Aus wie viel Gliedern bestand die Gesellschaft?

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Glieder $= x$
so ist die Einlage eines jeden $= 2x$;
also die Gesammt-Einlage $= 2x^3$;
mithin verhält sich $100 : 2x^2 = 2x :$ Totalgewinn.

Folglich ist der Totalgewinn $= \frac{4x^3}{100}$. Demnach ist

$$\frac{4x^3}{100} = 4x$$

$$\text{somit } \frac{x^2}{100} = 1$$

$$\text{also } x^2 = 100$$

$$\text{mithin } x = \pm 10.$$

Anmerkung.

Der negative Werth von x enthält die Auflösung folgender Aufgabe:

Eine Gesellschaft löset ein gemeinschaftliches Handlungsgeschäft auf. Jedes Glied erhält doppelt so viel Thaler, als die Zahl der Glieder der Gesellschaft beträgt.

Auf 100 des Kassenbestandes werden so viel Thaler verloren, als der Antheil eines Gliedes anzeigt. Der Totalverlust ist dem doppelten Antheil eines Jeden gleich. Aus wie viel Gliedern bestand die Gesellschaft?

Aufgabe LXIII.

Es leiht Jemand zwey Capitalien aus, deren Summe = 13000, und von welchen er gleich viel Zinsen zu verschiedenem Zinsfusse bezieht. Wäre das erste Capital zu dem Zinsfusse des zweiten, das zweite zu dem Zinsfusse des ersten ausgeliehen, so würde er von jenem 360 Thaler, von diesem 490 Thaler Zinsen erhalten. Welches waren die Capitalien, und welches war der Zinsfuss eines Jeden?

Auflösung.

Das eine Capital sey = S, so ist das andere = 13000 - S. Ist der Zinsfuss des ersten = x, des zweiten = y, so ist

$$\frac{S}{100}.x = \frac{13000-S}{100}y, \quad \frac{S}{100}y = 360, \quad \frac{13000-S}{100}x = 490$$

also $Sx = (13000-S)y$, $Sy = 36000$, $(13000-S)x = 49000$

folglich $\frac{Sx}{13000-S} = y$, $y = \frac{36000}{S}$, $x = \frac{49000}{13000-S}$.

$$\text{mithin } \frac{Sx}{13000-S} = \frac{36000}{S}$$

$$\text{somit } x = \frac{36000(13000-S)}{S^2}$$

demnach $\frac{36000(13000-S)}{S^2} = \frac{49000}{13000-S}$

also $36(13000-S)^2 = 49 \cdot S^2$

folglich $6(13000-S) = \pm 7 S$

mithin $6.13000 = (6 \pm 7)S$

somit $S = \frac{6.13000}{6 \pm 7}$

demnach ist entweder $S = \frac{6.13000}{13}$

$= 6000;$

oder $S = \frac{6.13000}{-1}$

$= -78000;$

somit das andere Capital entweder $= 13000 - 6000$

$= 7000;$

oder $= 13000-(-78000)$

$= 91000.$

Der Werth von y ist entweder $= \frac{36000}{6000}$

$= 6;$

oder $= \frac{36000}{-78000}$

$= -\frac{36}{78}$

$= -\frac{6}{13}.$

Der Werth von x ist entweder $= \frac{49000}{7000}$

$= 7;$

$$\text{oder} = \frac{49000}{91000}$$
$$= \frac{49}{91}$$
$$= \frac{7}{13}.$$

Anmerkung.

Die ersten Werthe von S, x, y lösen die Aufgabe in dem Sinne der Aussage auf. Die zweiten Werthe beantworten folgende Frage:

Jemand verschuldet zwey Capitalien, deren Differenz = 13000, und von welchen er gleich viel Zinsen zu ungleichem Zinsfusse bezahlt. Verzinsete er das erste Capital zu dem Zinsfusse des zweiten, das zweite zu dem Zinsfusse des ersten, so würde er von jenem 360, von diesem 490 bezahlen. Welches waren die Capitalien, und welches war der Zinsfuss derselben?

Aufgabe LXIV.

Die Nachlassenschaft eines Mannes wird unter seine Kinder vertheilt. Jedes erhält so vielmal 1000 Thaler, als Kinder sind. Von jedem 100 der Nachlassenschaft werden dreymal so viel Thaler, als Kinder sind, an eine wohlthätige Kasse abgegeben. Es ist $\frac{1}{750}$ dieser Abgabe der Zahl der Kinder gleich. Wie viel Kinder sind es?

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Kinder $= x$,

so ist der Antheil eines Jeden $= 1000x$

folglich die ganze Nachlassenschaft $= 1000x^2$

mithin $100 : 1000 x^2 = 3x : \text{Abgabe}$

somit die Abgabe $= 30 x^3$;

demnach $\frac{1}{750} 30 x^3 = x$

also $\frac{1}{25} x^2 = 1$

folglich $x^2 = 25$

somit $x = \pm 5$.

Anmerkung.

Der negative Werth von x enthält die Auflösung der folgenden Aufgabe:

Die Nachlassenschaft eines Mannes wird durch seine Kinder zusammengebracht. Jedes bezahlt so vielmal 1000 Thaler, als Kinder sind. Zu jedem 1000 der Nachlassenschaft werden dreymal so viel Thaler, als Kinder sind, aus einer wohlthätigen Kasse zugeschossen. Es ist $\frac{1}{750}$ dieses Zuschusses der Anzahl der Kinder gleich. Wieviel Kinder sind es?

Aufgabe LXV.

Jemand kaufte einen Garten für x Thaler, und verkauft ihn wieder zu 144 Thaler. Statt 100 des Einkaufspreises bekommt er x+100 zurück. Wie gross ist der Einkaufspreis?

Auflösung.

Es ist $100 : x = x + 100 : 144$

also $\left.\begin{matrix} x(x+100) \\ x^2 + 100x \end{matrix}\right\} = 14400$

$$\text{folglich } (x+50)^2 = 14400+2500$$
$$= 16900$$

$$\text{mithin } x = -50 \pm 130$$
$$= \left\{ \begin{matrix} 80 \\ -180 \end{matrix} \right\}.$$

Anmerkung.

Der negative Werth von x enthält die Auflösung der folgenden Aufgabe:

Es verkauft Jemand einen Garten für x Thaler, und hat ihn für 144 Thaler angekauft. Statt 100 des Verkaufspreises hatte er x—100 bezahlt. Wie gross ist der Verkaufspreis?

Aufgabe LXVI.

Jemand kauft einige Ries Papier für 10 Thaler. Hätte er für dasselbe Geld 3 Ries mehr erhalten, so hätte jedes 3 Thaler weniger gekostet. Wie viel Ries kaufte er?

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Ries = x, so kostet ein Ries $\frac{10}{x}$ Thaler. Wären der Ries 3 mehr gewesen, so hätte jedes Ries $\frac{10}{x+3}$ Thaler gekostet, also ist

$$\frac{10}{x} = \frac{10}{x+3} + 3$$

$$\text{folglich } \left. \begin{matrix} 10(x+3) \\ 10x+30 \end{matrix} \right\} = 10x + \left\{ \begin{matrix} 3x(x+3) \\ 3x^2+9x \end{matrix} \right.$$

$$\text{mithin } 30 = 3x^2 + 9x$$

$$\text{somit } 10 = x^2 + 3x$$

$$\text{demnach } \left.\begin{matrix} 10 + \frac{9}{4} \\ \frac{49}{4} \end{matrix}\right\} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\text{also } x = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}.$$

Anmerkung.

Der negative Werth von x beantwortet folgende Frage:

Jemand verkauft einige Ries Papier für 10 Thaler. Hätte er für dasselbe Geld 3 Ries weniger verkauft, so hätte jedes Ries 3 Thaler mehr gekostet. Wie viel Ries verkaufte er?

Aufgabe LXVII. (Fig. 47.)

Die Polargleichung der Parabel zu finden, wenn der Brennpunkt der Pol ist.

Auflösung.

Bezeichnet man den Radius Vector FM durch z, den Winkel AFM durch φ, das von dem Punkte M auf die Achse gefällte Perpendikel MP durch y, die dazu gehörige Abscisse AP durch x, so ist

$$FP = z.\cos.MFP, \qquad \left.\begin{matrix} MP \\ y \end{matrix}\right\} = z.\sin.MFP$$

$$= -z.\cos.\varphi \qquad\qquad = z.\sin.\varphi$$

$$\text{also } x = \tfrac{1}{2}p - z.\cos.\varphi$$

$$\text{folglich}\; \left.\begin{matrix} px \\ y^2 \\ z^2 \sin.\varphi^2 \\ z^2(1-(\cos.\varphi)^2) \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{4}p^2 - pz\cos.\varphi$$

$$\text{mithin } z^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - pz.\cos.\varphi + z^2(\cos.\varphi)^2$$

$$\text{somit } z = \pm\,(\tfrac{1}{2}p - z.\cos.\varphi)$$

$$\text{demnach } z(1 \pm \cos.\varphi) = \pm\, \tfrac{1}{2}p.$$

Es hat also z zwey Werthe, welche sind

$$z = +\frac{\tfrac{1}{2}p}{1+\cos.\varphi}, \qquad z = -\frac{\tfrac{1}{2}p}{1-\cos.\varphi}$$

$$= +\frac{\tfrac{1}{2}p}{2(\cos.\tfrac{1}{2}\varphi)^2} \qquad = -\frac{\tfrac{1}{2}p}{2(\sin.\tfrac{1}{2}\varphi)^2}$$

$$= +\frac{p}{(2\cos.\tfrac{1}{2}\varphi)^2} \qquad = -\frac{p}{(2\sin.\tfrac{1}{2}\varphi^2)};$$

von welchen Werthen der eine positiv, der andere negativ ist, der eine die Linie FM, der andere die ihr entgegengesetzt liegende Linie FN bezeichnet.

Anmerkung 1.

Wollte man diese Aufgabe dadurch auflösen, dass man $\left.\begin{matrix}FM\\ z\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{4}p + x$ setzte, wie es in den meisten Lehrbüchern geschiehet, so würde man erhalten

$$z = \tfrac{1}{4}p + \tfrac{1}{4}p - z.\cos.\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2}p - z.\cos.\varphi$$

$$\text{also } z(1+\cos.\varphi) = \tfrac{1}{2}p$$

$$\text{folglich } z = \frac{\tfrac{1}{2}p}{1+\cos.\varphi}$$

$$= +\frac{p}{(2\cos.\tfrac{1}{2}\varphi)^2}.$$

Es würde mithin nur der eine Werth von z, welcher dem Winkel φ zugehört, gefunden, welches mangelhaft wäre. Setzt man aber, wie allein richtig ist,

$$z = \pm(\tfrac{1}{4}p+x),\ \text{weil}\ z^2 = y^2+(x-\tfrac{1}{4}p)^2$$
$$= px+x^2-\tfrac{1}{2}px+\tfrac{1}{16}p^2$$
$$= x^2+\tfrac{1}{2}px+\tfrac{1}{16}p^2$$
$$= (x+\tfrac{1}{4}p)^2$$

$$\text{also}\ z = \pm(x+\tfrac{1}{4}p);$$

$$\text{so erhält man}\quad z = \pm(\tfrac{1}{4}p+\tfrac{1}{4}p-z\cos.\varphi)$$
$$= \pm(\tfrac{1}{2}p-z.\cos.\varphi)$$
$$= \pm\tfrac{1}{2}p \mp z.\cos.\varphi$$

$$\text{mithin}\ z(1\mp\cos.\varphi) = \pm\tfrac{1}{2}p$$

$$\text{somit}\ z = +\frac{p}{(2\cos.\tfrac{1}{2}\varphi)^2},\quad z = -\frac{p}{(2\sin.\tfrac{1}{2}\varphi)^2}.$$

Und daraus erhellet die Nothwendigkeit, die negativen Ausdrücke nicht zu verwerfen.

Anmerkung 2.

Macht man auf der Verlängerung von AF die Linie FA' = AF, und construirt eine Parabel, deren Achse A'F, und Brennpunkt F ist, nimmt man auch FP' = FP, und construirt die zu A'P' gehörige Ordinate P'M', so ist, wenn die gerade Linie FM' gezogen wird,

$$FM'^2 = FP'^2+P'M'^2$$
$$= FP^2+PM^2$$

$$= (AP - AF)^2 + PM^2$$
$$= (x - \tfrac{1}{4}p)^2 + y^2$$
$$= x^2 - \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{16}p^2 + px$$
$$= x^2 + \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{16}p^2;$$

mithin ist sowohl FM'^2, als $FM^2 = (x+\frac{1}{4}p)^2$. Die Algebra hat also in der Quadratwurzel von $x^2+\frac{1}{2}px+\frac{1}{16}p^2$ sowohl den Werth von FM, als den von FM' auszudrücken, und das thut sie dadurch, dass sie die Quadratwurzel aus $x^2+\frac{1}{2}px+\frac{1}{16}p^2 = \pm(x+\frac{1}{4}p)$ setzt, gleichwie die Linien FM, FM' einander gleich sind, und einander entgegengesetzt liegen. Es antwortet mithin die Algebra in der Gleichung $z = \pm(x+\frac{1}{4}p)$ erschöpfend auf die Frage: welches ist der Werth des zu einer gegebenen Abscisse gehörigen Radius Vectors einer Parabel, deren Brennpunkt in F liegt, und Parameter $= p$ ist? Da es in der Frage unentschieden bleibt, ob der Scheitel in A, oder A' liegt, da auch die von A, oder A' genommenen Abscissen nicht einander entgegengesetzt liegen, also jede mit dem Zeichen + zu versehen ist, so ertheilt sie die dadurch bestimmte doppelte Antwort.

Aufgabe LXVIII. (Fig. 48.)

Die Polargleichung der Hyperbel zu finden, wenn ein Brennpunkt der Pol ist.

Auflösung.

Es sey HF die Hauptachse, F ein Brennpunkt, C der Mittelpunkt, M ein Punkt der Hyperbel, MP eine

Ordinate der Achse, FM = z, AFM = φ, die Hauptachse = a, die Nebenachse = b, so ist

$$MP = z.\sin.\varphi,\quad FP = z.\cos.\varphi,\quad CF = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2)}$$

also $MP^2 = z^2(\sin.\varphi)^2$, $CP = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)} - z.\cos.\varphi$

folglich

$$\left.\begin{aligned} z^2(\sin.\varphi)^2 \\ z^2(1-(\cos.\varphi)^2)\end{aligned}\right\} \begin{aligned} &= \frac{b^2}{a^2}((\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)} - z.\cos.\varphi)^2 - \tfrac{1}{4}a^2) \\ &= \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - 2z\cos.\varphi\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)} + z^2(\cos.\varphi)^2 - \tfrac{1}{4}a^2)\end{aligned}$$

mithin

$$z^2 = \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}b^2 - 2z\cos.\varphi.\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)} + z^2(\cos.\varphi)^2(1+\frac{a^2}{b^2}))$$

$$= \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}b^2 - 2z\cos.\varphi\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)} + z^2(\cos.\varphi)^2\frac{\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2}{\tfrac{1}{4}b^2})$$

$$\text{somit } z = \pm\frac{b}{a}\left(\frac{1/2\, b - z\cos.\varphi.\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)}}{1/2\, b}\right)$$

$$\text{demnach } z\left(1 \pm \frac{b}{a}\,\frac{\cos.\varphi.\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)}}{1/2\, b}\right) = \pm 1/2\,\frac{b^2}{a}$$

$$\text{also } z = \frac{\pm 1/2\,\frac{b^2}{a}}{1 \pm \frac{\cos.\varphi.\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)}}{1/2\, a}}$$

$$= \pm\frac{1/2\, b^2}{a \pm \cos.\varphi.\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$\text{folglich entweder } z = +\frac{1/2\, b^2}{a+\cos.\varphi.\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$\text{oder } z = -\frac{1/2\, b^2}{a-\cos.\varphi.\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

Zusatz.

1) Ist $\varphi = 0$, so ist

der erste Werth von $z = +\frac{\frac{1}{2}b^2}{a+\sqrt{(a^2+b^2)}}$

$$= +\frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2)}}$$

$$= \frac{CF^2-\frac{1}{4}a^2}{CF+\frac{1}{2}a}$$

$$= CF-\frac{1}{2}a;$$

der zweite Werth von $z = -\frac{\frac{1}{2}b^2}{a-\sqrt{(a^2+b^2)}}$

$$= -\frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2)}}$$

$$= -\frac{CF^2-\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{2}a-CF}$$

$$= \frac{CF^2-\frac{1}{4}a^2}{CF-\frac{1}{2}a}$$

$$= CF+\frac{1}{2}a.$$

2.) Ist $\varphi < R$, so ist $\cos.\varphi$ positiv, also der erste Werth von z positiv, der zweite $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{unendlich}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$, je nachdem $a \begin{matrix}>\\ =\\ <\end{matrix} \cos.\varphi.\sqrt{(a^2+b^2)}$

---

also $\frac{a^2}{a^2+b^2} \begin{matrix}>\\ =\\ >\end{matrix} (\cos.\varphi)^2$

---

folglich $\frac{a^2+b^2}{a^2} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \begin{cases} \frac{1}{(\cos.\varphi)^2} \\ (\sec.\varphi)^2 \end{cases}$

---

mithin $\left.\begin{matrix} \frac{a^2+b^2}{a^2} - 1 \\ \frac{b^2}{a^2} \\ (\tan.\alpha)^2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \begin{cases} (\sec.\varphi)^2 - 1 \\ (\tan.\varphi)^2 \end{cases}$

wenn α den halben Asymptotenwinkel bezeichnet;

---

somit $\tan.\alpha \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \tan.\varphi$

---

demnach $\alpha \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \varphi$.

3.) Ist $\varphi \begin{Bmatrix} > R \\ < 2R \end{Bmatrix}$, so ist $\cos.\varphi$ negativ, also der zweite Werth von z negativ, der erste dagegen $\begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{unendlich} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$, je nachd. $a + \cos.\varphi.\sqrt{(a^2+b^2)} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0$

---

also $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} -\cos.\varphi$

---

folglich $\frac{a^2}{a^2+b^2} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} (\cos.\varphi)^2$

---

mithin $\frac{a^2+b^2}{a^2} \begin{Bmatrix} < \\ = \\ < \end{Bmatrix} (\sec.\varphi)^2$

$$\text{somit } \left.\begin{array}{r}\frac{a^2+b^2}{a^2}-1\\ \frac{b^2}{a^2}\\ (\tan.\alpha)^2\\ (\tan.(2R-\alpha))^2\end{array}\right\} \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} \begin{cases}(\sec.\varphi)^2-1\\ (\tan.\varphi)^2\end{cases}$$

$$\text{demnach } \tan.(2R-\alpha) \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} \tan.\varphi$$

$$\text{also } 2R-\alpha \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} \varphi$$

$$\text{folglich } 2R \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} \alpha+\varphi.$$

Anmerkung 1.

Nach dem Grundsatze, dass der grösseren, oder kleineren Quadratzahl die grössere, oder kleinere Wurzel zugehöre, wird hier aus der Bedingung, dass $(\tan.(2R-\alpha))^2 \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} (\tan.\varphi)^2$ sey, hergeleitet, es müsse auch $\tan.(2R-\alpha) \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \tan.\varphi$ seyn.

Es ist $1:\tan.(2R-\alpha)=\tan.(2R-\alpha):(\tan.(2R-\alpha))^2$,
und $1:\tan.\varphi = \tan.\varphi:(\tan.\varphi)^2$.

Wenn $(\tan.(2R-\alpha))^2 \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} (\tan.\varphi)^2$ gesetzt wird, so ist die positive Einheit als das Maass beider Grössen gedacht. Es ist aber $\tan.(2R-\alpha)$ sowohl, als $\tan.\varphi$ negativ,

weil $2R-\alpha$ und φ stumpfe Winkel sind. Werden die Glieder der zweiten Verhältnisse in beiden Proportionen, nämlich $(\tan.(2R-\alpha))^2$ und $\tan.(2R-\alpha)$, $(\tan.\varphi)^2$ und $\tan.\varphi$ durch die positive Einheit gemessen, so ist in beiden Verhältnissen das zweite Glied grösser, als das erste, also auch in den ersten Verhältnissen jener Proportionen das zweite Glied grösser, als das erste, d. h. sowohl $\tan.(2R-\alpha) > 1$, als $\tan.\varphi > 1$. Das findet aber, weil $\tan.(2R-\alpha)$ und $\tan.\varphi$ negative Zahlen sind, nur statt, wenn die Glieder durch die negative Einheit gemessen werden; mithin ist auch, wenn $\tan.(2R-\alpha) \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \tan.\varphi$ gesetzt wird, die negative Einheit das Maass beider Glieder. Demnach gehört der in diesem Sinne kleineren, oder grösseren Tangente der grössere, oder kleinere Winkel zu. Folglich ist die Folgerung richtig, dass $2R-\alpha \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} \varphi$ sey, wie es aus einer rein geometrischen Betrachtung gleichfalls hervorgeht.

Anmerkung 2.

Zur Bestimmung des ersten Werthes von z für den Fall, dass $\varphi \left\{ \begin{matrix} > R \\ < 2R \end{matrix} \right\}$ ist, hätte auch folgendermaassen geschlossen werden können. Es sey dieser Werth von

$$z \left\{ \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{unendlich} \\ \text{negativ} \end{matrix} \right\}, \text{ je nachdem } a+\cos.\varphi.\sqrt{(a^2+b^2)} \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} 0$$

$$\text{also } \cos.\varphi \gtreqless -\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$\text{folglich } (\cos.\varphi)^2 \gtreqless \frac{a^2}{a^2+b^2}$$

$$\text{mithin } (\sec.\varphi)^2 \lesseqgtr \frac{a^2+b^2}{a^2}$$

$$\text{somit } (\tan.\varphi)^2 \lesseqgtr \begin{cases} \dfrac{b^2}{a^2} \\ (\tan.(2\,R-\alpha))^2 \end{cases}$$

$$\text{demnach } \tan.\varphi \lesseqgtr \tan.(2\,R-\alpha)$$

$$\text{also } \varphi \lesseqgtr 2\,R-\alpha$$

$$\text{folglich } \alpha+\varphi \lesseqgtr 2\,R.$$

Ist nämlich $a+\cos.\varphi.\sqrt{(a^2+b^2)} \gtreqless 0$, so ist die positive Einheit das Maass beider Grössen, also auch der Grössen $\cos.\varphi$ und $-\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Nun ist $1:\cos.\varphi = \cos.\varphi:(\cos.\varphi)^2$, $1:-\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = -\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} : \frac{a^2}{a^2+b^2}$. Werden die negativen Glieder $\cos.\varphi$, $-\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ der ersten Verhältnisse beider Proportionen durch die positive

Einheit gemessen, so ist das erste Glied 1 in beiden Verhältnissen grösser, als das zweite, also auch in beiden Proportionen das dritte Glied grösser, als das vierte, d. h. $\cos.\varphi > (\cos.\varphi)^2$, $-\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} > \frac{a^2}{a^2+b^2}$. Ist aber die negative Grösse $\cos.\varphi$ grösser, als die positive $(\cos.\varphi)^2$, und $-\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} > \frac{a^2}{a^2+b^2}$, so ist die negative Einheit das Maass beider Grössen, mithin auch sowohl von $(\cos.\varphi)^2$, als von $\frac{a^2}{a^2+b^2}$; demnach auch von $(\tan.\varphi)^2$ und $(\tan.(2R-\alpha))^2$. Es ist aber $1:\tan\varphi = \tan.\varphi:(\tan.\varphi)^2$, $1:\tan.(2R-\alpha) = \tan.(2R-\alpha):(\tan.(2R-\alpha))^2$. Also ist die negative Einheit das Maass der Verhältnisse $\tan.\varphi:\tan.\varphi^2$, $\tan.(2R-\alpha):(\tan.(2R-\alpha))^2$, und weil $\tan.\varphi$, $\tan.(2R-\alpha)$ negativ sind, sowohl $\tan.(2R-\alpha) > (\tan.(2R-\alpha))^2$, als $\tan.\varphi > (\tan.\varphi)^2$, folglich in beiden Proportionen das erste Glied grösser, als das zweite, d. h. $1 > \tan.\varphi$, $1 > \tan.(2R-\alpha)$, mithin die positive Einheit das Maass beider Verhältnisse, somit auch von $\tan.\varphi$, $\tan.(2R-\alpha)$. Und da $\tan.\varphi \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} (\tan.(2R-\alpha)$, so gehört der kleineren, oder grösseren Tangente der kleinere, oder grössere stumpfe Winkel zu, d. h. es ist $\varphi \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} 2R-\alpha$, folglich $\alpha+\varphi \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} 2R$, übereinstimmend mit dem vorhergehenden.

Anmerkung 3.

Carnot stellt auf den Vorgang von d'Alembert dem Satze, dass die negativen Grössen < 0 seyen, die Proportion entgegen, es sey $+1:-1 = -1:+1$. (A). Setzt

man nun, sagt er, $-1 < 0$, also noch vielmehr $-1 < +1$, so ist in dieser Proportion das erste Glied grösser, als das zweite, folglich ist auch das dritte grösser, als das vierte, d. h. $-1 > +1$, welches der Annahme widerspricht.

Er hätte eben so eine andere Proportion, wie $+4:-2 = -3:+2$ (B.) nehmen, und sagen können: setzt man $-2 < 0$, also noch mehr $-2 < +3$, so ist das erste Glied grösser, als das zweite, also auch das dritte grösser, als das vierte, d. h. $-3 > +2$, welches jener Annahme widerspricht.

Der Ehrfurcht, welche die Mathematik einflösst, angemessener dürfte es seyn, wenn Carnot in jener Proportion folgendermaassen geschlossen hätte: »Da $+1:-1 =$ »$-1:+1$ ist, so muss, wenn $+1 > -1$, also das erste »Glied grösser, als das zweite gesetzt wird, auch das »dritte Glied grösser, als das vierte, d. h. $-1 > +1$ seyn;« oder in dieser also: »da $+3:-2 = -3:+2$ ist, »so ist, wenn $+3 > -2$, also das erste Glied grösser, »als das zweite gesetzt wird, auch das dritte grösser, als »das vierte, d. h. $-3 > +2$.«

Eben so hätte er in der Proportion $+2:+3 = -2:-3$ (C.) folgenden Schluss machen können: Da $+2 < +3$, also das erste Glied kleiner, als das zweite ist, so ist auch das dritte kleiner, als das vierte, d. h. $-2 < -3$; oder in der Proportion $+3:+2 = -3:-2$ (D.) folgenden: Es ist $+3 > +2$, also das erste Glied grösser, als das zweite, folglich ist das dritte grösser, als das vierte, d. h. $-3 > -2$.

Und des Mathematikers Aufgabe ist es, da an der Wahrheit dieser Sätze, weil aus wahren Sätzen nichts Falsches gefolgert werden kann, nicht zu zweifeln ist, diese Wahrheit zu erkennen sich zu bemühen, wenn sie auch einander geradezu zu widersprechen scheinen. . . .

Zwey Grössen können nur dann mit einander verglichen werden, wenn sie sich auf einerley Einheit beziehen. Von zwey gleichartigen Grössen heisst die eine grösser, als die andere, wenn in jener die Einheit öfter wiederhohlt ist, als in der anderen. In der Reihe der natürlichen Zahlen 1 2 3 4 5 6 7 etc. wird darum die nachfolgende grösser genannt, als die vorhergehende, weil die positive Einheit in jener öfter vorkommt, als in dieser. Setzt man die Reihe über dar erste Glied hinaus fort, dass sie wird

$$-7-6-5-4-3-2-1+0+1+2+3+4+5+6+7 \text{ etc.}$$

so herrscht auf der anderen Seite der Nulle dasselbe Gesetz, wie auf der einen, und es muss darum -5 eben so gewiss kleiner als -4 genannt werden, als $+4$ kleiner, als $+5$ gesetzt wird. In so fern also die positive Einheit als das Maass einer negativen Grösse und einer positiven angesehen wird, ist die negative kleiner, als die positive.

Die Reihe -1 -2 -3 -4 -5 -6 etc. kann auch geschrieben werden

$$1(-1)\ 2(-1)\ 3(-1)\ 4(-1)\ 5(-1)\ 6(-1) \text{ etc.}$$

In dem nachfolgenden Gliede ist die negative Einheit öfter enthalten, als in dem vorhergehenden. Also darf das nachfolgende grösser gesetzt werden, als das vorhergehende. Setzt man die Reihe über das erste Glied hinaus fort, dase sie wird

$$\text{etc.}\ +6+5+4+3+2+1+0-1-2-3-4-5-6 \text{ etc.}$$

so herrscht links von der Nulle dasselbe Gesetz, wie rechts von derselben; es muss desshalb $+3$ eben so gewiss kleiner, als $+2$ gesetzt werden, als -2 kleiner, als

—3 gesetzt wurde. In so fern also die negative Einheit als das Maass einer negativen und einer positiven Grösse betrachtet wird, ist die negative grösser, als die positive.

Um mithin von zwey gleichartigen Grössen überhaupt, sie seyen beide negativ, oder beide positiv, oder es sey die eine negativ, die andere positiv, beurtheilen zu können, welche die grössere sey, muss vorher bestimmt werden, ob die positive, oder die negative Einheit zum Maasse genommen werden solle. Ohne dies bestimmt zu haben, lässt sich eben so richtig sagen, es sey $+5 > -3$, als es sey $+5 < -3$, es sey $-5 > -3$, als es sey $-5 < -3$, es sey $+5 > +3$, als es sey $+5 < +3$; gleichwie auf die Frage, »wer hat am meisten von zwey Personen, wovon die eine »3000 Thaler Vermögen, die andere 2000 Thaler Schulden »hat?« nicht eher geantwortet werden kann, als bis festgesetzt ist, ob die Frage heisst: »wer hat am meisten Vermögen?«, oder: »wer hat am meisten Schulden?« In jenem Falle hat die eine, in diesem die andere am meisten.

Wenn, in der Proportion A, $+1 < -1$ gesetzt wird, so ist die positive Einheit, also das erste Glied das Maass für beide Glieder des ersten Verhältnisses, folglich muss das dritte Glied, d. h. die negative Einheit, das Maass für die Gieder des letzten Verhältnisses seyn. Misst man aber -1 und $+1$ durch -1, wer wirds läugnen, dass alsdann $-1 > +1$ sey?

Eben so verhält es sich mit der Proportion B. Setzt man das erste Glied grösser, als das zweite, d. h. $+3 > -2$, so ist dieses in so fern wahr, als die positive Einheit zum Maasse für beide Glieder genommen wird; und nun muss das dritte Glied grösser seyn, als das vierte, d. h. $-3 > +2$, welches wahr ist, sobald man die negative Einheit als das Maass beider Zahlen annimmt.

Es liegt mithin in den Proportionen A, B nichts widersprechendes, und Carnot kann daraus nichts gegen die Annahme herleiten, dass das negative kleiner, als o, und kleiner, als jede positive Grösse sey.

Nimmt man, in den Proportionen C, D, $+3 > +2$, so ist auch $-3 > -2$, weil, wenn das $\left\{\begin{matrix}\text{zweite}\\ \text{erste}\end{matrix}\right\}$ Glied grösser, als das $\left\{\begin{matrix}\text{erste}\\ \text{zweite}\end{matrix}\right\}$ gesetzt wird, auch das $\left\{\begin{matrix}\text{vierte}\\ \text{dritte}\end{matrix}\right\}$ grösser, als das $\left\{\begin{matrix}\text{dritte}\\ \text{vierte}\end{matrix}\right\}$ gesetzt werden muss. Es ist aber auch $-3 > -2$, wenn man die negative Einheit als das Maass für beide Glieder ansieht. Ist aber $-3 > -2$, so ist auch $-1 > 0$. Ebenso kann $-7 > -3$ angesehen werden, also auch $-4 > 0$, mithin auch $-3 > +1$ u. s. w.

Diese Ansichten überheben auch den Mathematiker, Ausnahmen von den Grundsätzen gelten zu lassen, wie in den Capiteln über die Ungleichheiten in mathematischen Lehrbüchern, französischen und deutschen, angetroffen werden. Wer wird z. E. die Grundsätze aufgeben wollen, zwey ungleiche Grössen mit gleichem multiplicirt, oder durch gleiches dividirt, giebt ungleiches, und zwar die Multiplication, oder Division des grösseren giebt das grössere, oder, das grössere mit dem grösseren multiplicirt giebt das grössere, das grössere durch das kleinere dividirt giebt das grössere.

Doch findet man bey vielen Schriftstellern, z. E. bey Cauchy in der Analyse algébrique, Behauptungen, wie folgende:

Es ist $8 > 7$, $\quad 8 > 7$, $\quad a > b$, $\quad a > b$

$$\frac{-3 = -3}{}, \quad \frac{-3 = -3}{}, \quad \frac{-m = -m}{}, \quad \frac{-m = -m}{}$$

und doch $-24 < -21$, $-\frac{8}{3} < -\frac{7}{3}$, $-am < -bm$, $-\frac{a}{m} < -\frac{b}{m}$.

Dagegen ist folgendes zu erinnern. Es kann gesetzt werden $+1 : +8 = -3 : -24$, $+1 : +7 = -3 : -21$. Setzt man die positive Einheit als das Maass für die Glieder der ersten Verhältnisse in beiden Proportionen, so ist sowohl $+1 < +8$, als $+1 < +7$, folglich sowohl in der ersten Proportion $-3 < -24$, als in der zweiten $-3 < -21$, also ist die negative Einheit das Maass der Glieder beider Verhältnisse, folglich auch von -24 und -21, mithin ist $-24 > -21$. Demnach muss, wenn $8 > 7$, $-3 = -3$ ist, auch $(+8)(-3) > (+7)(-3)$ gesetzt werden.

Es ist $-3 : 1 = 8 : -\frac{8}{3}$, $-3 : 1 = 7 : -\frac{7}{3}$. Setzt man die positive Einheit als Maass für die Glieder der ersten Verhältnisse in beiden Proportionen, so ist $-3 < +1$, also sowohl $+8 < -\frac{8}{3}$, als $+7 < -\frac{7}{3}$, mithin die negative Einheit das Maass für die Glieder beider Verhältnisse, folglich auch für $-\frac{8}{3}$, $-\frac{7}{3}$, also ist $-\frac{8}{3} > -\frac{7}{3}$ u. s. w.

Eben so findet man die Behauptung, dass, wenn $-3 < +2$ gesetzt würde, doch $(-3)^2 > (+2)^2$ seyn müsse. — Dagegen ist folgendes zu erinnern. Es ist $+1 : -3 = -3 : +9$. Wird nun $-3 < +2$ gesetzt, so ist $+1$ das Maass für beide Zahlen, also ist auch $+1 > -3$, mithin das dritte Glied $>$ das vierte, d. h. $-3 > +9$, folglich -1 das Maass für -3, $+9$. Ist aber -1 das Maass für $+9$ und $+4$, so ist $\left.\begin{matrix}+9\\(-3)^2\end{matrix}\right\} < \left\{\begin{matrix}+4\\(+2)^2\end{matrix}\right.$.

Aufgabe LXIX. (Fig. 49. a. b.).

Durch zwey gegebene concentrische Kreise, von einem ausserhalb desselben gegebenen Punkte A aus, eine gerade Linie AG zu legen, deren Segmente AG, GF, welche durch den zweiten Durchschnitt G mit dem grösseren Kreise und einen der Durchschnitte F mit dem kleineren gebildet werden, in dem Verhältnisse der gegebenen geraden Linien p, q stehen, wobey $p > q$ ist.

Analysis.

Es sey AG die gesuchte Linie, so ist, wenn der Mittelpunkt O mit dem Punkte F durch die gerade Linie OF verbunden, und GH der Linie OF parallel gezogen, auch bis zum Durchschnitte mit der, wo nöthig, verlängerten AE verlängert wird, $AH:HO = AG:GF = p:q$, mithin AH, somit der Punkt H gegeben. Da auch $\left.\begin{matrix}GA:AF\\GH:OF\end{matrix}\right\} = p:p-q$, so ist GH, somit der Punkt G gegeben.

Construction.

Man lege durch A, O die geraden Linien AP, OQ, auf einerley Seite von AO, einander parallel, mache $AP = p$, $OQ = q$, ziehe die gerade Linie PQ, verlängere dieselbe bis zum Durchschnitte H mit der, wo nöthig, verlängerten AE, richte in O auf AO den Radius OU perpendikular auf, ziehe demselben die Linie HW parallel, welche von der durch A, U gezogenen geraden Linie in W geschnitten werde, beschreibe aus H, als Mittelpunkte, mit HW, als Radius, einen Kreis, welcher dem grösseren Kreise in G begegne, und ziehe die, den kleineren Kreis in F schneidende, gerade Linie AG, so ist dieselbe die verlangte.

Determination.

Wenn der Punkt F auf dem Bogen CK gesucht wird (K sey der Berührungspunkt der von A an den kleineren Kreis gezogenen Tangente), so ist

$$AG < AE, \quad AF > AC$$

$$\text{also } GA:AF < EA:AC$$

$$\text{folglich } AG:GF > AE:EC;$$

also muss das Verhältniss $p:q \geqq$ als das Verhältniss AE:EC seyn.

Wenn der Punkt F auf dem Bogen DK liegen soll,

$$\text{so ist } AG < AE, \quad GF > ED.$$

$$\text{also } AG:GF < AE:ED$$

$$\text{mithin muss } p:q \leqq AE:ED \text{ seyn.}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } AL < AE,\ AK > AC,\ LK > ED$$

$$\text{also } LA:AK < EA:AC, \quad \text{und } AL:LK < AE:ED.$$

$$\text{folglich } AL:LK > AE:EC.$$

$$\text{Da } p:q \geqq AE:FC, \quad p:q \leqq AE:ED \text{ ist;}$$

$$\text{so kann } \left.\begin{matrix} p:q \\ AH:HO \end{matrix}\right\} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \left\{\begin{matrix} AL:LK \\ AM:MO \end{matrix}\right. \text{ genommen werden;}$$

$$\text{also } AO:OH \gtreqless AO:OM$$

$$\text{folglich } OH \lesseqgtr OM$$

mithin kann H zwischen O und M, in M, auf die Verlängerung von OM fallen. Ist $AO:OH < AO:OM$, so

$$\text{kann } \underline{AO:OH \stackrel{=}{<} AO:OE} \text{ werden,}$$

$$\text{folglich } OH \stackrel{=}{>} OE;$$

mithin kann der Punkt H in E und auf die Verlängerung von OE fallen.

$$\text{Da } \underline{p:q \stackrel{=}{>} AE:EC} \text{ ist}$$

$$\text{so ist } \underline{p:p-q \stackrel{=}{<} EA:AC}.$$

$$\text{folglich } AE \stackrel{=}{>} \begin{cases} \frac{p}{p-q} AC \\ \frac{p}{p-q}(AO-OC) \\ \frac{p}{p-q} AO - \frac{p}{p-q} OC. \end{cases}$$

$$\text{Da } \underline{AH:HO = p:q} \text{ ist}$$

$$\text{so ist } \underline{HA:AO = p:p-q}$$

$$\text{somit } HA = \frac{p}{p-q} AO.$$

$$\text{Da } \left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} OA \\ QR \end{matrix}\right\}:AH \\ RP:PA \\ p-q:p \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} UO \\ OC \end{matrix}\right\}:HW \text{ ist, wenn } QR \# AO;$$

$$\text{so ist } HW = \frac{p}{p-q} OC$$

$$\text{folglich } \underline{AE \stackrel{=}{>} AH-HW}$$

$$\text{mithin } HW \geqq \begin{cases} HA - AE \\ HE. \end{cases}$$

$$\text{Auch ist } p:q \leqq AE:ED$$

$$\text{also } p:p-q \geqq EA:AD$$

$$\text{folglich } AE \leqq \begin{cases} \frac{p}{p-q}\,AD \\ \frac{p}{p-q}\,(AO+OD) \\ \frac{p}{p-q}\,AO + \frac{p}{p-q}\,OD \\ HA+HW \end{cases}$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} EA-AH \\ HE \end{matrix}\right\} \leqq HW.$$

Ferner ist $AL:LK < AE:ED$, $AL:LK > AE:EC$,

$$\text{somit } p:q \gtreqless AL:LK$$

$$\text{also } p:p-q \lesseqgtr LA:AK$$

$$\text{folglich } LA \gtreqless \frac{p}{p-q}\,AK$$

$$\text{mithin für das obere Zeichen } AL - \frac{p}{p-q}\,AK > 0$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} \left(AL - \frac{p}{p-q}\,AK\right)^2 \\ \left(\frac{p}{p-q}\,AK - AL\right)^2 \end{matrix}\right\} > 0$$

für das untere Zeichen $o < \frac{p}{p-q} AK - AL$

somit $o < \left(\frac{p}{p-q} AK - AL\right)^2$.

demnach in allen Fällen $o \underset{<}{=} \left(\frac{p}{p-q} AK - AL\right)^2$

$$\text{somit } o \underset{<}{=} \begin{cases} \frac{p^2 AK^2}{(p-q)^2} + LA^2 - \frac{2p}{p-q} LA.AK \\ \frac{p^2(AO^2 - OK^2)}{(p-q)^2} + LA^2 - \frac{2p.AO}{p-q}\,\frac{LA.AK}{AO} \end{cases}$$

$$\text{mithin } \left\{\begin{matrix} \frac{p^2.OK^2}{(p-q)^2} \\ GH^2 \end{matrix}\right\} \underset{<}{=} \begin{cases} \frac{p^2.AO^2}{(p-q)^2} + LA^2 - \frac{2p.AO}{p-q} AV \\ AH^2 + LA^2 - 2\,HA.AV \\ HL^2 \end{cases}$$

also $GH \underset{<}{=} HL$;

folglich erreicht der aus H, als Mittelpunkte, beschriebene Kreis den Bogen EL.

Endlich ist $HA:AO = WH:OU$

also $AH:HW = AO:\begin{cases} OU \\ OF \end{cases}$

folglich $AG:GF = AH:HO$
$= p:q$.

Anmerkung.

Da $LA \overset{>}{\underset{<}{=}} \frac{p}{p-q} AK$ ist, so kann auch geschlossen werden, wie folgt; es sey $o \overset{>}{\underset{<}{=}} \frac{p}{p-q} AK - LA$

$$\text{folglich } o \;\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\; \left\{\begin{array}{l} \frac{p^2}{(p-q)^2}AK^2+LA^2-\frac{2p}{p-q}LA.AK \\ \frac{p^2(AO^2-OK^2)}{(p-q)^2}+LA^2\left\{\begin{array}{l} -\frac{2pAO}{p-q}\,\frac{LA.AK}{AO} \\ -\frac{2p.AO}{p-q}VA \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{c} \frac{p^2.OK^2}{(p-q)^2} \\ GH^2 \end{array}\right\} \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} \left\{\begin{array}{l} \frac{p^2.AO^2}{(p-q)^2}+LA^2-\frac{2p}{p-q}OA.AV \\ AH^2+LA^2-2\,HA.AV \\ HL^2. \end{array}\right.$$

Aber man darf nicht daraus herleiten wollen, es sey somit $GH \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} HL$. Ist nämlich $LA > \frac{p}{p-q} AK$, und leitet man daraus her, es sey $o > \frac{p}{p-q}AK - LA$, so ist das richtig, wenn die positive Einheit zum Maasse beider Glieder genommen wird. Setzt man nun zur Abkürzung $\frac{p}{p-q}AK - LA = -m$, so ist $1 : -m = -m : +m^2$. Ist die positive Einheit das Maass der Glieder des ersten Verhältnisses, so ist $1 > -m$, d. h. das erste Glied der Proportion grösser, als das zweite, folglich ist auch das dritte grösser, als das vierte, d. h. $-m > +m^2$. Das ist aber nur richtig, wenn die negative Einheit das Maass von $-m$, $+m^2$. Ist aber die negative Einheit das Maass von $+m^2$, oder von $\frac{p^2}{(p-q)^2}AK^2 + AL^2 - \frac{2p}{p-q}$ $LA.AK$, so ist auch die negative Einheit das Maass von GH^2 und HL^2, wovon jenes grösser ist, als dieses, mithin ist $GH < HL$. Es ist also in allen Fällen $GH \begin{matrix}=\\<\end{matrix} HL$.

Aufgabe LXX. (Fig. 50.).

Die Länge der von dem Brennpunkte F einer gegebenen Ellipse zu einem Punkte derselben gezogenen geraden Linie FM (Radius Vector genannt) zu finden.

Auflösung.

Bezeichnet man die grosse Achse AB mit a, die kleine DE mit b, den Mittelpunkt der Ellipse mit C, die Abscisse CP mit u, so ist aus bekannten Gründen

$$FP\,(=FC-CP) = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2-\tfrac{1}{4}b^2)}-u$$

$$\text{also}\quad FP^2 = \tfrac{1}{4}a^2-\tfrac{1}{4}b^2-u\sqrt{(a^2-b^2)}+u^2$$

$$\text{folglich}\quad \left.\begin{matrix}FP^2+PM^2\\ FM^2\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{4}a^2-\tfrac{1}{4}b^2-u\sqrt{(a^2-b^2)}+u^2 \left\{\begin{matrix}+\dfrac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2-u^2)\\ +\tfrac{1}{4}b^2-\dfrac{b^2}{a^2}u^2\end{matrix}\right.$$

$$= \tfrac{1}{4}a^2-u\sqrt{(a^2-b^2)}+\frac{a^2-b^2}{a^2}u^2$$

$$\text{mithin}\quad FM = \pm\left(\tfrac{1}{2}a-\frac{u}{a}\sqrt{(a^2-b^2)}\right).$$

Anmerkung 1.

Die Algebra antwortet in Vorstehendem in höchster Allgemeinheit auf die Frage, wie gross die Entfernung des gegebenen Brennpunktes F einer Ellipse, deren grosse und kleine Achse = a und b gesetzt werden, von einem Punkte, dessen Abscisse (vom Mittelpunkte gerechnet) = u gesetzt wird, sey. Indem es unentschieden bleibt, ob AB, oder A'B', wenn A'F = FA, A'B' = AB genommen wird, die Lage der grossen Achse sey, ertheilt sie die Antwort für beide Fälle durch Bestimmung der Länge der Linien FM und FM', wovon jene durch

das positive Zeichen, diese durch das negative jenes doppelten Werthes angegeben wird.

Anmerkung 2.

Sucht man den Werth von GM, so findet man in ganz ähnlicher Weise den doppelten Ausdruck GM $= \pm(\frac{1}{2}a + \frac{u}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)})$, wovon der obere die Linie GM, der untere die ihr absolut gleiche, ihr parallel laufende, Linie M'G' bezeichnet, Linien, welche die Algebra durch die Zeichen + — zu unterscheiden pflegt.

Anmerkung 3.

Sucht man die Werthe von FM+MG, so findet man FM+MG $= \pm a$, d. h. die beiden positiven Linien FM und MG bilden eine Summe $= +a$, die ihnen entgegengesetzt liegenden FM' und M'G' eine Summe $= -a$.

Anmerkung 4.

Dass dies Alles keine müssige Unterscheidung sey, erhellet aus folgender Aufgabe.

Aufgabe LXXI. (Fig. 50.).

Die Polargleichung der Ellipse zu finden, wenn ein Brennpunkt der Pol ist.

Auflösung.

Bezeichnet man FM durch z, AFM durch φ, so ist

$$PF = -z.\cos.\varphi, \qquad MP = z.\sin.\varphi$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} CP \\ u \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)} + z.\cos.\varphi$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} MP^2 \\ z^2(\sin.\varphi)^2 \\ z^2(1-(\cos.\varphi)^2) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - (\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)} + z.\cos.\varphi)^2) \\ \\ = \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - z.\cos.\varphi\sqrt{(a^2-b^2)} - z^2(\cos.\varphi)^2) \end{matrix}$$

$$\text{mithin } z^2 = \frac{b^2}{a^2}\tfrac{1}{4}b^2 - \frac{b^2}{a^2} z\cos.\varphi\sqrt{(a^2-b^2)} \left\{ \begin{array}{l} + z^2(\cos.\varphi)^2\left(1 - \dfrac{b^2}{a^2}\right) \\ + z^2(\cos.\varphi)^2\dfrac{a^2-b^2}{a^2} \end{array} \right.$$

$$\text{somit} \quad z = \pm\left(\frac{b}{a}\frac{b}{2} - z.\cos.\varphi\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}\right)$$

$$\text{demnach} \quad z\left(1 \pm \cos.\varphi\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}\right) = \pm\frac{b^2}{2a}$$

$$\text{also ist} \quad z = \pm\frac{\dfrac{b^2}{2a}}{1 \pm \cos.\varphi\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}}$$

$$= \pm\frac{\tfrac{1}{2}b^2}{a \pm \cos.\varphi\sqrt{(a^2-b^2)}}.$$

Es hat mithin z zwey verschiedene Werthe. Es ist entw. $z = +\dfrac{\tfrac{1}{2}b^2}{a + \cos.\varphi\sqrt{(a^2-b^2)}}$, oder $z = -\dfrac{\tfrac{1}{2}b^2}{a - \cos.\varphi\sqrt{(a^2-b^2)}}$; durch welche Werthe die Linien FM, FN angedeutet werden.

Anmerkung 1.

Dieselbe Aufgabe kann auf folgende Art aufgelöset werden.

$$\text{Es ist } \left.\begin{array}{r} FM \\ z \end{array}\right\} = \pm\left(\tfrac{1}{2}a - \frac{u}{a}\sqrt{(a^2-b^2)}\right), \quad u = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)} + z.\cos.\varphi$$

$$\text{also } z = \pm\left(\tfrac{1}{2}a - \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}\left(\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)} + z.\cos.\varphi\right)\right)$$

$$= \pm\left(\tfrac{1}{2}a - \frac{\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2}{\tfrac{1}{2}a} - \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}z.\cos.\varphi\right)$$

folglich $z\left(1 \pm \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}\cos.\varphi\right) \Bigg\} = \pm \frac{1/2\,b^2}{a}$

$z\,\frac{a \pm \sqrt{(a^2-b^2)}.\cos\varphi}{a} \Bigg\}$

$$\text{mithin } z = \pm \frac{1/2\,b^2}{a \pm \sqrt{(a^2-b^2)}.\cos.\varphi}.$$

Wer sich also erlaubt, nur $z = +\left(\frac{1}{2}a - \frac{u}{a}\sqrt{(a^2-b^2)}\right)$ zu setzen, und den Werth $z = -\left(1/2\,a - \frac{u}{a}\sqrt{(a^2-b^2)}\right)$ z' vernachlässigen, der lauft Gefahr, die Polargleichung nur zur Hälfte anzugeben, nämlich nur zu finden $z = +\frac{1/2\,b^2}{a+\cos.\varphi\sqrt{(a^2+b^2)}}$, während der vollständige Werth von $z = \pm \frac{1/2\,b^2}{a \pm \cos.\varphi.\sqrt{(a^2-b^2)}}$ gesetzt werden muss.

Anmerkung 2.

Bezeichnet man die einem Winkel φ zugehörigen Werthe von z mit z', z'', so ist

$$z = +\frac{1/2\,b^2}{a+\cos.\varphi\sqrt{(a^2-b^2)}},\quad z'' = -\frac{1/2\,b^2}{a-\cos.\varphi\sqrt{(a^2-b^2)}}$$

$$= +\frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{2}a+\cos.\varphi.\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2)}} \quad = -\frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{2}a-\cos.\varphi.\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2)}}.$$

Soll die Polargleichung, statt des Winkels AFM $= \varphi$, den Winkel BFM $= \beta$ enthalten, so hat man in den Werthen von z nur $-\cos.\beta = \cos.\varphi$ zu setzen. Es wird also

$$z' = +\frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{a}{2}-\cos.\beta.\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2)}},\quad z'' = -\frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{2}a+\cos.\beta.\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2)}}.$$

Wird der Winkel β um 2 R vergrössert, und bezeichnet man die dadurch bestimmten Werthe von z durch z''', z'''', so ist

$$z''' = + \frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{a}{2} - \cos.(2R + \beta)\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}}, \quad z'''' = - \frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{2}a + \cos.(2R + \beta)\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}}$$

$$= + \frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{2}a + \cos.\beta\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}} \qquad = - \frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{2}a - \cos.\beta\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}}.$$

Ist z' die Bezeichnung von FM, z'' von FN, so ist z''' die Bezeichnung von FN, z'''' von FM. Und z', z'', so wie z''', z'''' liegen einander entgegengesetzt, gleichwie sie mit entgegengesetzten Zeichen versehen sind. Bei Vergleichung von z', z'' ist $z' =$ FM die positive, $z'' =$ FN die negative Linie. Bey Vergleichung von z''', z'''' ist $z''' =$ FN die positive, $z'''' =$ FM die negative Linie.

D'Alembert giebt, in seinen Opuscules mathématiques Tom. VIII. in dem Capitel sur les quantités negatives, als die Polargleichung der Ellipse an, $z = + \frac{\frac{1}{4}b^2}{a - \cos.\beta.\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}}$, welches nur die eine Hälfte derselben ist, findet obige Werthe von z' und z''', und behauptet, weil beide mit dem Zeichen + behaftet sind, dass zuweilen zwey mit dem Zeichen + behaftete Linien von einem Punkte aus in gerade entgegengesetzter Richtung lägen. Hätte er die andere Hälfte der Polargleichung gleichfalls gekannt, so würde er, wenn er z'' und z'''' gesucht hätte, mit demselben Rechte haben behaupten können, dass zwey mit dem Zeichen — behaftete Linien von einem Punkte aus zuweilen in gerade entgegengesetzter Richtung lägen, und dass, wenn er z' und z'''', z'' und z''' verglichen hätte, zwey Linien, welche mit entgegengesetzten Zeichen versehen sind, von einem Punkte aus in einerley Richtung liegen könnten.

Aus dem oben Angeführten erhellet, dass der Grundfehler bey D'Alembert in der unvollkommenen Angabe der Polargleichung, und der daran geknüpften Vergleichung derjenigen Werthe von z liegt, welche verschiedenen Winkeln zugehören, während die Algebra nur diejenigen in Vergleichung zu bringen erlaubt, welche durch denselben Winkel bestimmt werden. Sie leihet $z'' = FN$ das Zeichen —, weil sie $z' = FM$ das Zeichen + vorsetzt. Sie versieht $z'''' = FM$ mit dem Zeichen —, weil sie $z''' = FN$ das Zeichen + vorsetzt.

Und so kann dasjenige, was D'Alembert in jenem Capitel zum Beweise seiner Behauptungen von der Polargleichung der Ellipse, und eben so von der der Hyperbel hernimmt, nur zur Bestätigung der den seinigen gerade entgegengesetzten Behauptungen dienen.

Aufgabe LXXII. (Fig. 51.)

Den analytischen Ausdruck für das von einem gegebenen Punkte O auf die gegebene gerade Linie BQ gefällte Perpendikel OQ zu finden.

Auflösung.

Es sey die Gleichung für die Linie BQ, wenn man die Abscissen von A an auf der geraden Linie AP, die Ordinaten rechtwinkelig nimmt, und den Winkel $QBP = \beta$ setzt, $y = x.\tan.\beta + b$

$= ax + b$, wenn $\tan.\beta = a$ genommen wird;

so ist, wenn man OP durch y' bezeichnet,

$$OM = y' - y$$
$$= y' - ax - b$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{also } OM.\cos.\beta \\ OQ\end{array}\right\} = (y'-ax-b)\cos.\beta$$

$$= \frac{y'-ax-b}{\sec.\beta}$$

$$= \pm\frac{y'-ax-b}{\sqrt{(1+a^2)}}$$

$$\text{folglich } OQ^2 = \frac{(y'-ax-b)^2}{1+a^2}.$$

Zusatz.

Macht man $NO = OM$, so ist $MN = 2(y'-ax-b)$. Zieht man $NC \# BQ$, so ist die Gleichung für CN, wenn die Ordinaten mit y'' bezeichnet werden, und die Abscissen dieselben bleiben, wie vorhin,

$$y'' = ax+b+2(y'-ax-b)$$
$$= 2y'-ax-b;$$

und es wird, wenn man das Perpendikel OR auf CN fällt, $OR (= ON.\cos.N) = (2y'-ax-b-y')\cos.\beta$

$$= \frac{y'-ax-b}{\sec.\beta}$$

$$= \pm\frac{y'-ax-b}{\sqrt{(1+a^2)}}$$

$$\text{folglich } OR^2 = \frac{(y'-ax-b)^2}{1+a^2}.$$

Der Ausdruck $\frac{(y'-ax-b)^2}{1+a^2}$ enthält also sowohl den Werth von OQ^2, als den von OR^2. Die Quadratwurzel aus demselben muss demnach sowohl den Werth von OQ, als den von OR ausdrücken. Das geschieht durch die Zeichen $\pm$, gleichwie die Geometrie diese Linien einander in entgegengesetzte Richtung legt.

Aufgabe LXXIII.

Die Gleichung $a^{2n}+x^{2n}$ in einfache Factoren von der Form $x = p(\cos.\varphi \pm \sin.\varphi.\sqrt{-1})$ zu verwandeln.

Auflösung.

Es sey $x = p(\cos.\varphi \pm \sin.\varphi\sqrt{-1})$, so ist sowohl

$a^{2n} + p^{2n}(\cos.\varphi + \sin.\varphi.\sqrt{-1})^{2n} = 0$, als

$a^{2n} + p^{2n}(\cos.\varphi - \sin.\varphi.\sqrt{-1}) = 0$

also $a^{2n} + p^{2n}(\cos.2n\varphi + \sin.2n\varphi.\sqrt{-1}) = 0$,

und $a^{2n} + p^{2n}(\cos.2n\varphi - \sin.2n\varphi.\sqrt{-1}) = 0$

folglich $2a^{2n} + 2p^{2n}\cos.2n\varphi = 0$,

und $2p^{2n}\sin.2n\varphi\sqrt{(-1)} = 0$

mithin $\sin.2n\varphi = 0$, weil $p^{2n} = 0$ gesetzt, auch $a^{2n} = 0$, also $a = 0$ geben würde, welches gegen die Voraussetzung ist;

demnach $\cos.2n\varphi = \pm 1$

somit $a^{2n} \pm p^{2n} = 0$

also $a^{2n} = \mp p^{2n}$

folglich $a^{n} = \pm p\sqrt{\mp 1}$.

Für $a^{n} = \pm p\sqrt{-1}$ würde a^{n} imaginär, welches gegen die Voraussetzung ist, mithin ist $a^{n} = \pm p\sqrt{+1}$,

somit $a = \pm p$, und $\cos.2n\varphi = -1$

demnach $p = \mp a$ und $2n\varphi = (2m+1)\pi$

also $\varphi = \frac{2m+1}{2n}\pi$.

A.) Es sey $p = -a$, so ist der allgemeine Ausdruck eines Paares von Wurzeln $x = -a(\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2m+1}{2n}.\pi\sqrt{-1})$, und die allgemeine Form eines quadratischen Factors =

$$(x + a\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi + a\sin.\frac{2m+1}{2n}\pi.\sqrt{-1})(x + a\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi - a.\sin.\frac{2m+1}{2n}\pi.\sqrt{-1})$$

$$= x^2 + 2ax\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi + a^2(\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi)^2 + a^2(\sin.\frac{2m+1}{2n}\pi)^2$$

$$= x^2 + 2ax\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi + a^2.$$

Mithin enthält $a^{2n} + x^{2n}$ die Factoren

$$(x^2 + 2ax\cos.\frac{1}{2n}\pi + a^2)(x^2 + 2ax\cos.\frac{3}{2n}\pi + a^2)(x^2 + 2ax\cos.\frac{5}{2n}\pi + a^2)\ldots.$$

$$(x^2 + 2ax\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi + a^2)\ldots.(x^2 + 2ax\cos.\frac{2n+2m+1}{2n}\pi + a^2)\ldots.$$

Es ist aber $\cos.\frac{2n+2m+1}{2n}\pi = \cos.(\pi + \frac{2m+1}{2n}\pi)$

$$= \cos.(\pi - \frac{2m+1}{2n}\pi)$$

$$= \cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi$$

---

demn. $x^2 + 2ax\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi + a^2 = x^2 - 2ax\cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi + a^2.$

Es sind also die auf den Factor $x^2 + 2ax\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi + a^2$ folgenden Factoren mit diesem, oder den vorhergehenden identisch, und die von einander verschiedenen Factoren stellen sich durch das Produkt

$$(x^2 + 2ax\cos.\frac{1}{2n}\pi + a^2)(x^2 + 2ax\cos.\frac{3}{2n}\pi + a^2)(x^2 + 2ax\cos.\frac{5}{2n}\pi + a^2)\ldots..(x^2 + 2ax\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi + a^2)$$

dar, in welchem die Anzahl der Factoren = n, die An-

zahl der zum Grunde liegenden einfachen Factoren aber $= 2n$ ist, so dass $a^{2n} + x^{2n} = (x^2 + 2ax\cos.\frac{1}{2n}\pi + a^2)(x^2 + 2ax\cos.\frac{3}{2n}\pi + a^2)(x^2 + 2ax\cos.\frac{5}{2n}\pi + a^2)\ldots(x^2 + 2ax\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi + a^2)$ ist.

Zusatz.

Die einfachen Factoren des letzten Factors sind $x = -a(\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2n-1}{2n}\pi.\sqrt{-1})$. Nun ist

$$\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi = \cos.(\pi - \frac{1}{2n}\pi)$$
$$= -\cos.\frac{1}{2n}\pi;$$
$$\sin.\frac{2n-1}{2n}\pi = \sin.(\pi - \frac{1}{2n}\pi)$$
$$= \sin.\frac{1}{2n}\pi;$$

---

also $-a(\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2n-1}{2n}\pi\sqrt{-1}) = -a(-\cos\frac{1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{1}{2n}\pi\sqrt{-1})$

$$= a(\cos.\frac{1}{2n}\pi \mp \sin.\frac{1}{2n}\pi.\sqrt{-1}).$$

Die einfachen Factoren des ersten Factors $x^2 + 2ax \cos.\frac{1}{2n}\pi + a^2$ sind $x = -a(\cos.\frac{1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{1}{2n}\pi.\sqrt{-1})$, folglich sind die einfachen Factoren des letzten Factors den einfachen Factoren des ersten mit entgegengesetzten Zeichen gleich.

Allgemein sind die Factoren des Factors $x^2 + 2ax \cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi + a^2$ in folgendem Ausdrucke enthalten,

$$x = -a(\cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi.\sqrt{-1}).$$

Die Factoren des Factors $x^2 + 2ax\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi + a^2$ sind

$$x = -a\left(\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2m+1}{2n}\pi.\sqrt{-1}\right).$$

Es ist aber $\cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi = \cos.\left(\pi - \frac{2m+1}{2n}\pi\right)$

$$= -\cos.\frac{2m+1}{2n}.\pi;$$

$$\sin.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi = \sin.\left(\pi - \frac{2m+1}{2n}\pi\right)$$

$$= \sin.\frac{2m+1}{2n}\pi;$$

---

mithin $-a\left(\cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi.\sqrt{-1}\right)$

$$= -a\left(-\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2m+1}{2n}\pi.\sqrt{-1}\right)$$

$$= a\left(\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi \mp \sin.\frac{2m+1}{2n}\pi.\sqrt{-1}\right);$$

demnach sind die einfachen Factoren zweyer Factoren, welche vom ersten und letzten gleich weit abstehen, einander absolut gleich, aber mit entgegengesetzten Zeichen versehen.

Ist die Anzahl der quadratischen Factoren ungerade, so ist der mittlere $= a^2 + 2ax\cos.\frac{n}{2n}\pi + x^2$

$$= a^2 + 2ax\cos.\tfrac{1}{2}\pi + x^2$$

$$= a^2 + x^2;$$

mithin sind die einfachen Factoren desselben einander absolut gleich und mit entgegengesetzten Zeichen versehen. Man braucht also nur die einfachen Factoren der ersten, oder der zweiten Hälfte zu suchen, und dieselben mit entgegengesetzten Zeichen zu versehen, um sie alle zu erhalten.

B. Es sey $p = +a$. Der allgemeine Ausdruck eines Paares einfacher Factoren ist

$$x = a\left(\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2m+1}{2n}\pi.\sqrt{-1}\right)$$

und eines quadratischen Factors

$$= x^2 - 2ax\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi + a^2, \quad \text{und}$$

$$a^{2n}+x^{2n} = \left(x^2-2ax\cos.\frac{1}{2n}\pi+a^2\right)\left(x^2-2ax.\cos.\frac{3}{2n}\pi+a^2\right)$$
$$\left(x^2-2ax\cos.\frac{5}{2n}\pi+a^2\right)\dots\left(x^2-2ax\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi+a^2\right).$$

Es ist aber $\cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi = \left(\cos.\pi - \frac{2m+1}{2n}\pi\right)$

$$= -\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi$$

---

also ist $x^2-2ax\cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi+a^2 = x^2+2ax\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi+a^2$; mithin erhält man für den Fall $p = +a$ dieselben Factoren, wie oben, wenn $p = -a$ gesetzt wird.

Aufgabe LXXIV. (Fig. 52.)

Den Krümmungshalbmesser einer krummen Linie, deren Gleichung $y = Fx$ gegeben ist, in einem gegebenen Punkte (x, y) zu finden.

Auflösung.

Die Gleichung des Krümmungskreises sey

$$(y'-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \gamma^2,$$

so ist $2(y'-\beta)\frac{dy'}{dx}+2(x-\alpha) = 0$

folglich $(y'-\beta)\frac{dy'}{dx}+x-\alpha = 0$

mithin $(y'-\beta)\frac{d^2y'}{(dx)^2}+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2+1 = 0.$

Da der Kreis durch den Punkt (x, y) gehen soll, und die ersten und zweiten Differentialquotienten des Krümmungskreises und der Curve einander gleich werden sollen, so ist

$$(y-\beta)\frac{d^2y}{(dx^2)}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0,\ (y-\beta)\frac{dy}{dx}+x-\alpha=0,\ (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\gamma^2$$

$$\text{somit } y-\beta=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{(dx)^2}},\quad \alpha-x=(y-\beta)\frac{dy}{dx}$$

$$\text{demnach } \alpha-x=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{(dx)^2}}\,\frac{dy}{dx}$$

$$\text{also}\ \left.\begin{array}{l}\left(-\dfrac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{(dx)^2}}\right)^2+\left(\dfrac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{(dx)^2}}\right)^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\\ \left(\dfrac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{(dx)^2}}\right)^2\left(1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)\\ \dfrac{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{(dx)^2}\right)^2}\end{array}\right\}=\gamma^2$$

$$\text{folglich } \gamma=\pm\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{(dx)^2}}.$$

Zusatz 1.

Es hat der Krümmungshalbmesser zwey einander absolut gleiche, mit entgegengesetzten Zeichen versehene, Werthe.

Zusatz 2.

Die allgemeine Gleichung für die Kegelschnitte ist

$$y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2$$

also

$$2ydy = pdx - \frac{p}{a}xdx$$

folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p - \frac{p}{a}x}{2y}$$

mithin

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{p - \frac{p}{a}x}{2y}\right)^2$$

$$= \frac{4y^2 + p^2 - 2\frac{p^2}{a}x + \frac{p^2}{a^2}x^2}{4y^2}$$

$$= \frac{4y^2 + p^2 - 2\frac{p}{a}\left(px - \frac{p}{2a}x^2\right)}{4y^2}$$

$$= \frac{y^2 + \frac{1}{4}p^2 - \frac{p}{2a}y^2}{y^2}$$

$$= \frac{y^2\left(1 - \frac{p}{2a}\right) + \frac{1}{4}p^2}{y^2}$$

$$\text{und}\quad \frac{d^2 y}{(dx)^2} = \frac{-2\frac{p}{a}y - 2(p - \frac{p}{a}x)\frac{dy}{dx}}{4y^2}$$

$$= -\frac{\frac{p}{a}y + (p - \frac{p}{a}x)^2 \frac{1}{2y}}{2y^2}$$

$$= -\frac{2\frac{p}{a}y^2 + (p - \frac{p}{a}x)^2}{4y^3}$$

$$= -\frac{2\frac{p}{a}(px - \frac{p}{2a}x^2) + p^2 - 2\frac{p^2}{a}x + \frac{p^2}{a^2}x^2}{4y^3}$$

$$= -\frac{p^2}{4y^3};$$

$$\text{demnach ist}\quad \gamma = \pm \frac{\left(y^2(1 - \frac{p}{2a}) + \frac{1}{4}p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{4}p^2}$$

$$= \mp \frac{\left(y^2(1 - \frac{p}{2a}) + \frac{1}{4}p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2}.$$

Ist die Gleichung eines anderen Kegelschnittes $y'^2 = p'u - \frac{p'}{2a'}u^2$, und bezeichnet γ' den Krümmungshalbmesser für den Punkt u', y', so ist $\gamma'^2 = \frac{\left(y'^2(1 - \frac{p'}{2a'}) + \frac{1}{4}p'^2\right)^3}{(\frac{1}{4}p'^2)^2}$.

Ist nun $u = -x$, $p' = -p$, $a' = -a$, so ist

$$y'^2 = (-p)(-x) - \frac{-p}{-2a}(-x)^2$$

$$= px - \frac{p}{2a}x^2;$$

also ist $y = y'$, und $y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2$ zugleich die Gleichung des zweiten Kegelschnittes. Auch ist

$$y'^2 = \frac{(y^2(1-\frac{-p}{-2a})+\frac{1}{4}(-p)^2)^3}{(\frac{1}{4}(-p)^2)^2}$$

$$= \frac{(y^2(1-\frac{p}{2a})+\frac{1}{4}p^2)^3}{\frac{1}{4}p^2};$$

mithin ist der Ausdruck für y^2 identisch mit dem für y'^2. Werden durch obige Gleichungen Ellipsen bezeichnet, so ist, weil die Geometrie die von der Algebra mit dem Zeichen — versehenen Linien durch den Gegensatz der Lage unterscheidet, die Gleichung $y'^2 = p'u - \frac{p'}{2a'}u^2$ die Gleichung für die über AB' als Hauptachse beschriebene Ellipse, wenn die Gleichung $y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2$ die Gleichung für die über AB beschriebene ist. Die Krümmungshalbmesser MR$=\gamma$, M'R'$=\gamma'$, welche zu den Punkten M, M' gehören, deren Coordinaten x, y und u, y' einander gleich sind, gehören, liegen auf verschiedenen Seiten der geraden Linie MM', und sind einander parallel, und werden desshalb algebraisch durch die Zeichen + — unterschieden.

Zusatz 3.

In derselben Weise lässt sich zeigen, dass jede Gleichung für eine Curve die Gleichung für eine zweite jener congruente Curve ist, deren Abscissen eine den Abscissen der ersten entgegengegetzte Lage haben, und deren Gleichung aus der Gleichung für jene erhalten wird, wenn alle Coëfficienten solche Zeichenänderung erleiden, dass die Zeichen aller Glieder der Gleichung unverändert bleiben.

Mit 3 Steintafeln.

Tab. I.

Fig: 6.

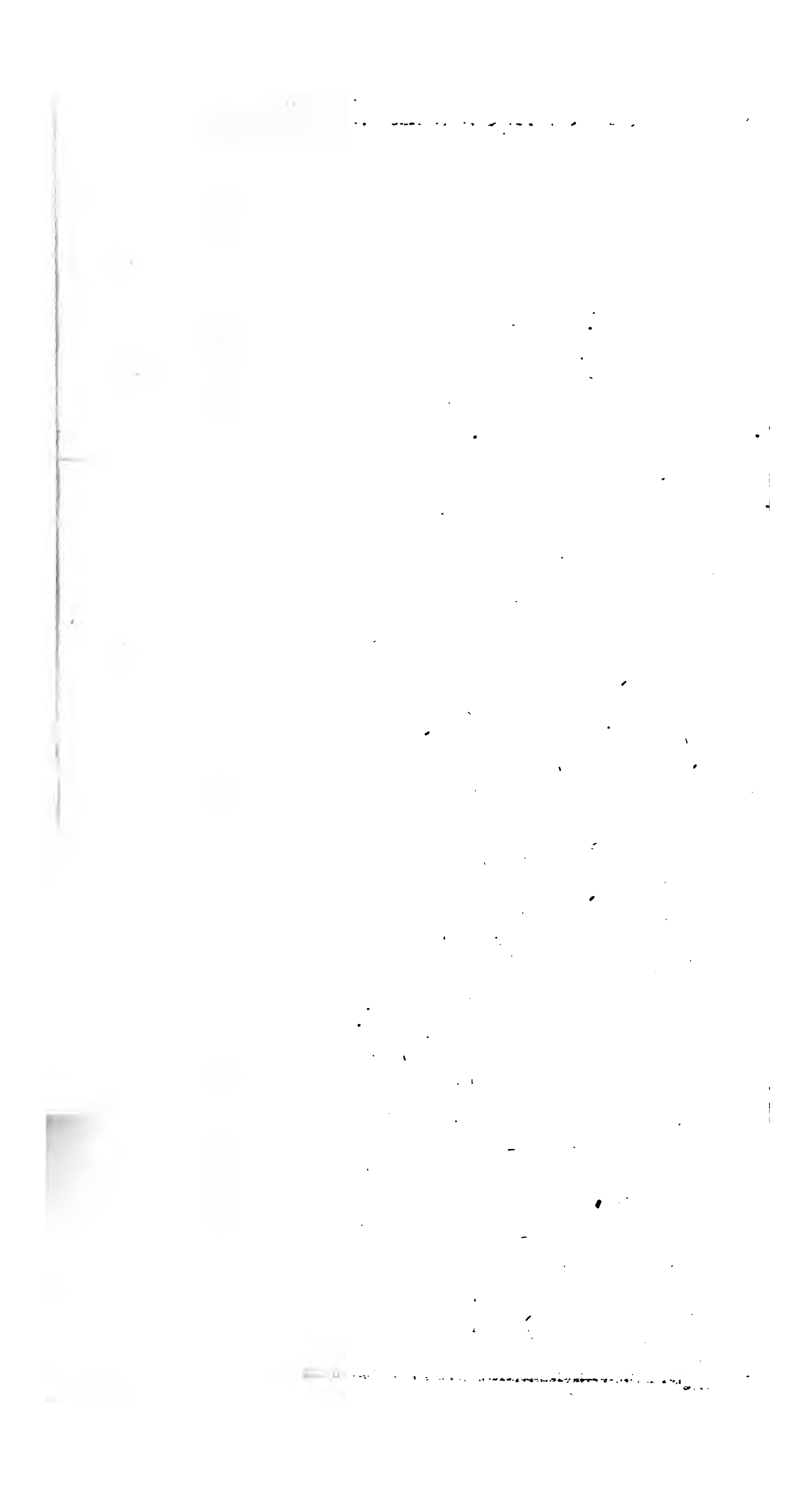
Fig: 8.

Fig: 9.

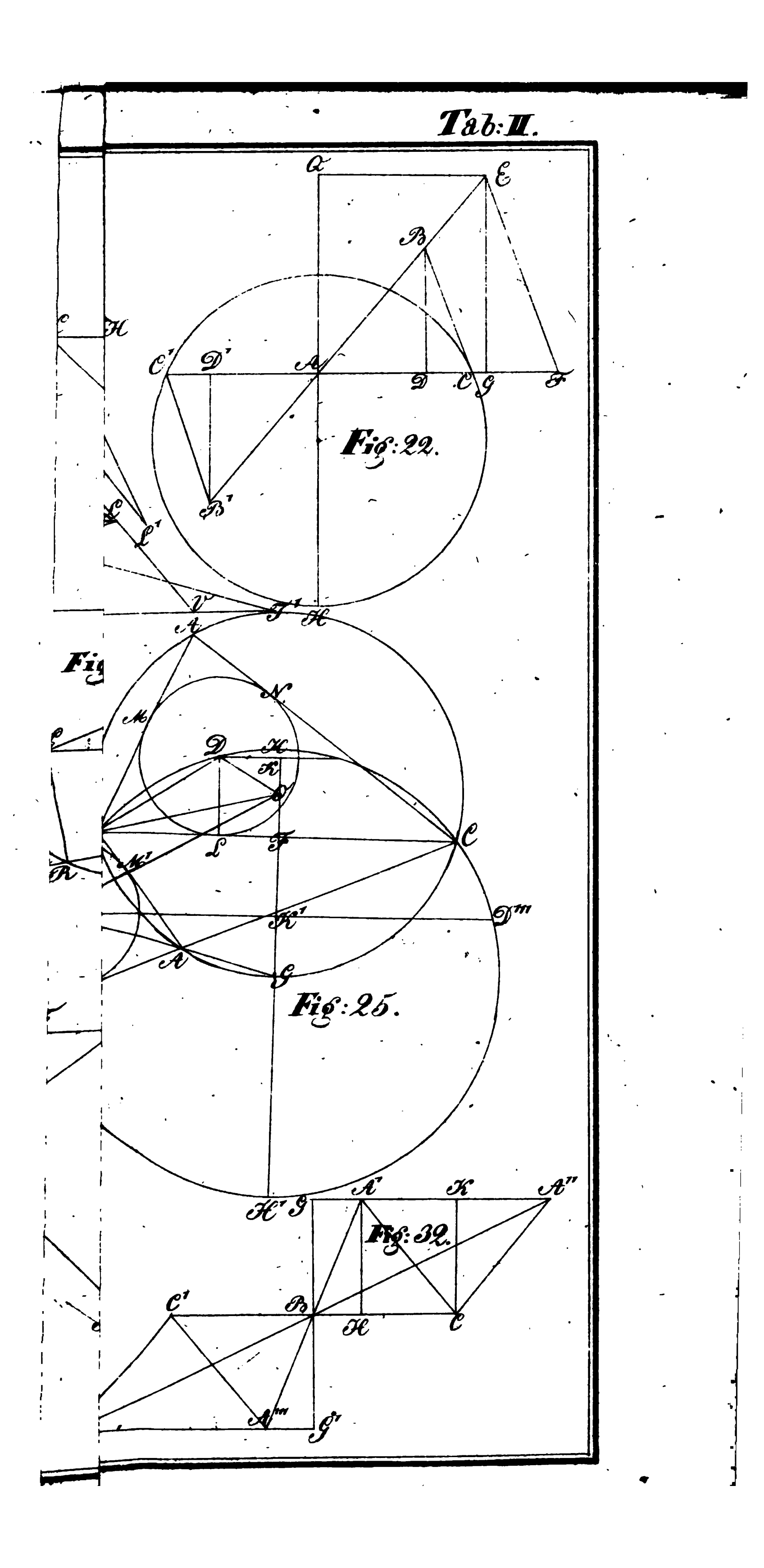
Fig. 11.

Fig: 13.

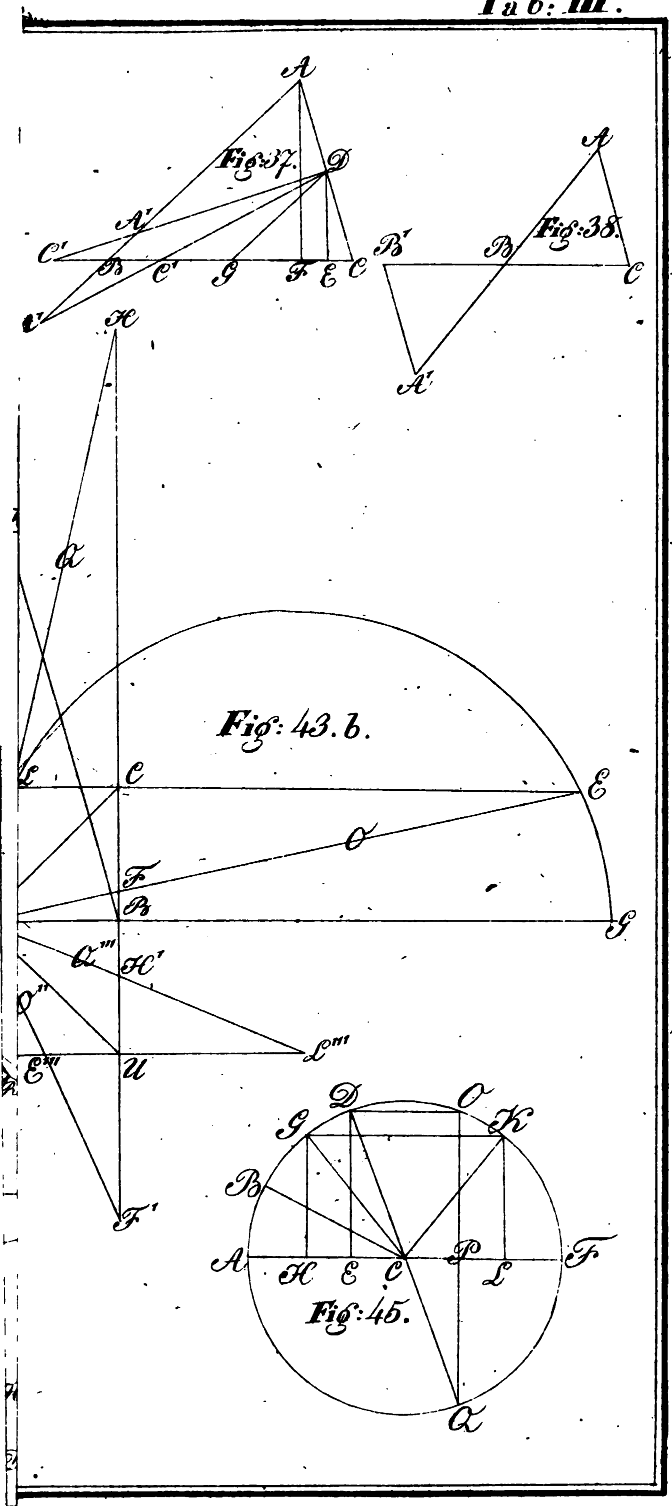
Fig: 16.

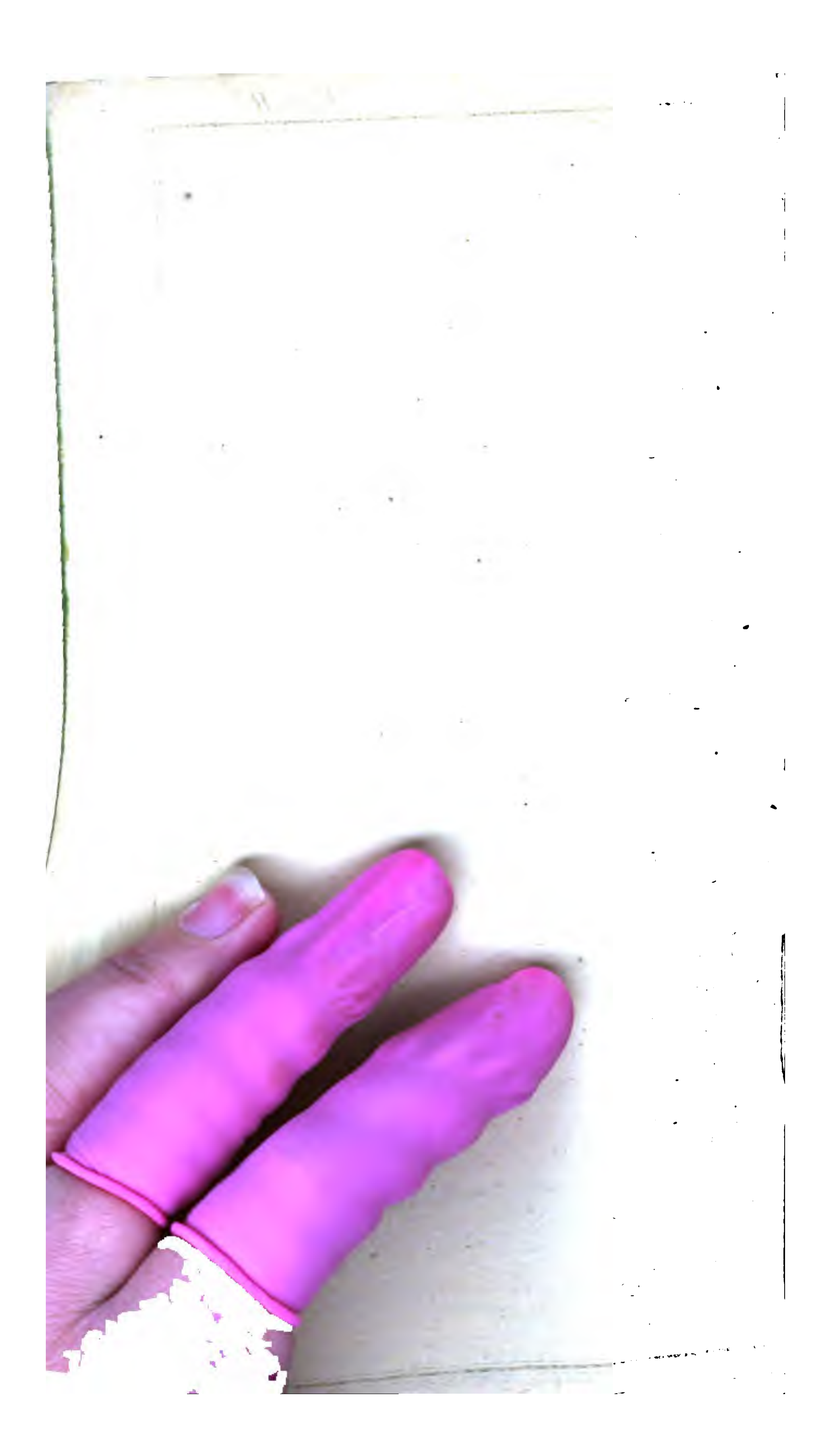


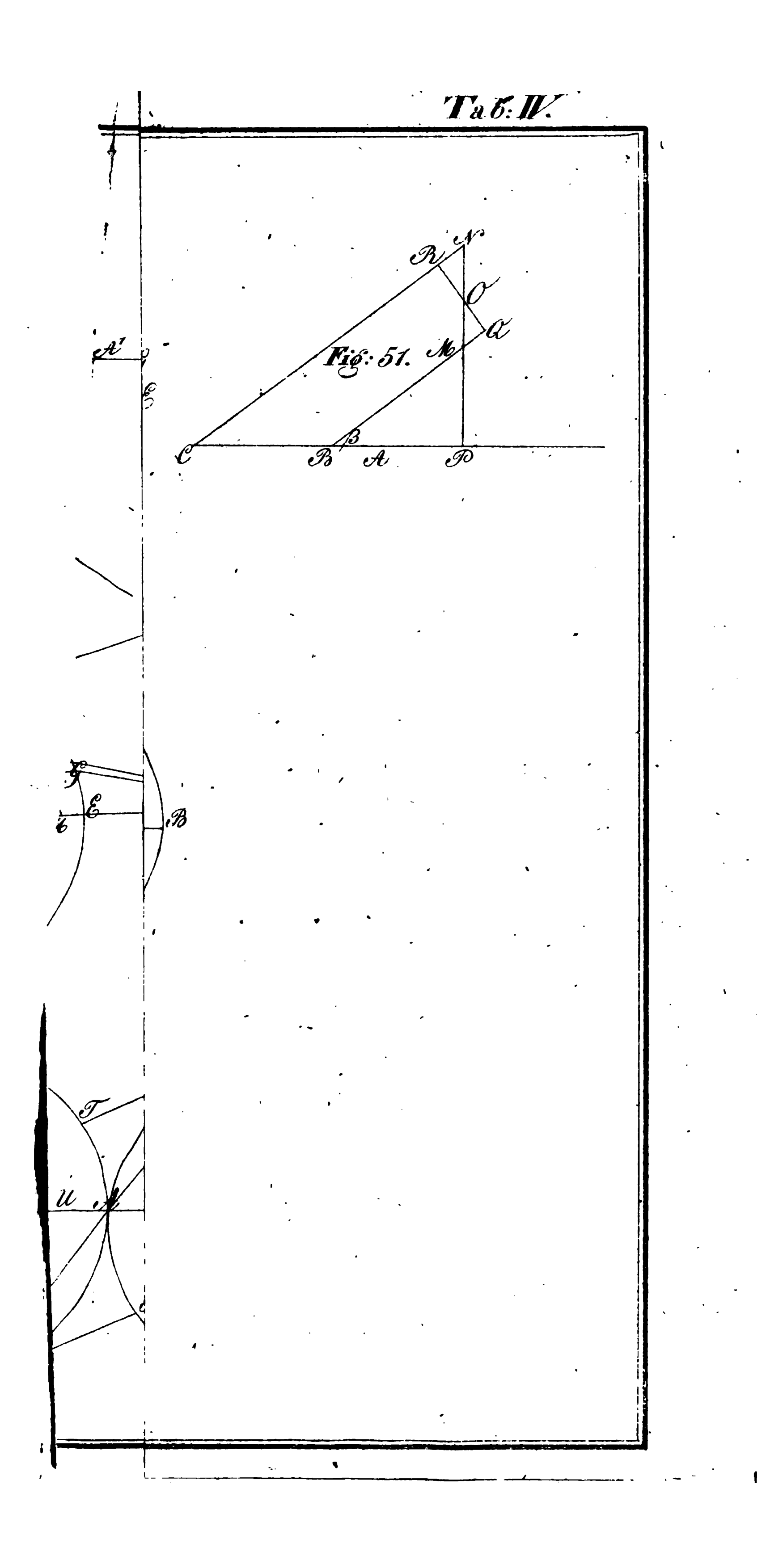
Tab: II.



Q
E
B
C'
D'
A
D
C
G
F
Fig: 22.
B'
V
T'
H
A
N
M
D
H
K
O
L
F
C
M'
K'
D'''
A
G
Fig: 25.
H'
G
A'
K
A''
Fig: 32.
C'
B
H
C
A'''
G'


Fig: 37.
A
D
A'
C'
B
C'
G
F
E
C
Fig: 38.
B'
A'
Fig: 43. b.
H
Q
L
E
O
F
B
G
Q'''
H'
O''
L'''
E'''
U
F'
Fig: 45.
K
P
Q




Tab: IV.
Fig: 51.
N
R
O
Q
M
β
C
B
A
P



